ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο "**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**" δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό "**Εξετάσεις**" της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι' αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ'έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα "**εργαλείο δουλειάς**" για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **20 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το "**ξεχωριστό θέμα**".

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι' αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

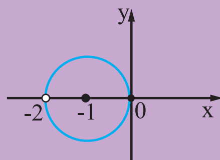
Α΄ Μέρος (Άλγεβρα)

Β΄ Μέρος (Ανάλυση)

Άλγεβρα Μέτρο Μιγαδικού Μιγαδικοί αριθμοί αριθμού Αόριστο Ολοκλήρωμα Ρυθμός Μεταβολής De l’ Hospital Ανάλυση Εμβαδόν Συναρτήσεις Ακρότατα

1ο μάθημα

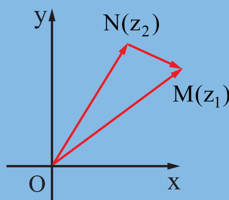
Μιγαδικοί αριθμοί



Α΄ Μέρος (Άλγεβρα)
2ο Κεφάλαιο

2ο μάθημα

Μέτρο Μιγαδικού αριθμού





Μιγαδικοί αριθμοί

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $x^2+1=0$ στο R δημιούργησε ένα νέο σύνολο, υπερσύνολο του R, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C στο οποίο θεωρήθηκε η ύπαρξη ενός νέου στοιχείου του i με την ιδιότητα $i^2=-1$ και το οποίο ονομάστηκε φανταστική μονάδα. Στο νέο σύνολο C οι βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που γνωρίσαμε στο R διατηρούνται με τους κανόνες λογισμού (π.χ. επιμεριστική, αντιμεταθετική ιδιότητα) και επιπλέον κάθε στοιχείο του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $z=\alpha+\beta i$ όπου $\alpha,\beta\in R$ (κανονική μορφή). Το α λέγεται **πραγματικό μέρος** και συμβολίζεται $\mathbf{Re(z)=\alpha}$ ενώ το β λέγεται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται $\mathbf{Im(z)=\beta}$. Οι μιγαδικοί της μορφής $z=\alpha+0i$ αποτελούν το σύνολο R (πραγματικοί αριθμοί). Οι μιγαδικοί της μορφής $z=0+\beta i$ αποτελούν το σύνολο I (φανταστικοί αριθμοί). Είναι φανερό ότι τα σύνολα R,I είναι γνήσια υποσύνολα του συνόλου C (μιγαδικοί αριθμοί)

Συζυγείς μιγαδικοί

Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Ονομάζουμε συζυγή του z και συμβολίζουμε με $\overline{z}$ τον $\overline{z}=\alpha-\beta i$.

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$. Τότε: $z_1=z_2\Leftrightarrow\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Ειδικά: αν $\alpha+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

1. Πρόσθεση: $z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

2. Πολλαπλασιασμός: $z_1z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

3. Διαίρεση: Η διαίρεση εκτελείται με τη βοήθεια του συζυγούς του μιγαδικού του παρονομαστή.

Έστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i\neq 0$.

Τότε:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\ldots=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Όμοια όπως στο R ορίζουμε για τον μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$:

i. $z^1 = z$ **ii.** $z^0 = 1$, $z \neq 0$

iii. $z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^\nu}$, $\nu \in N^*$, $z \neq 0$ **iv.** $z^\nu = z^{\nu-1} \cdot z$, $\nu \in N$, $\nu > 1$

Για τις δυνάμεις του i ειδικά ορίζουμε:
$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
Γενικότερα, $i^\nu = i^{4\pi+\upsilon} = (i^4)^\pi \cdot i^\upsilon = 1 \cdot i^\upsilon = i^\upsilon$ όπου π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4 . Επειδή $\upsilon = 0,1,2,3$ έχουμε: $i^\nu = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \upsilon = 0 \\ i, & \text{αν} \quad \upsilon = 1 \\ -1, & \text{αν} \quad \upsilon = 2 \\ -i, & \text{αν} \quad \upsilon = 3 \end{cases}$

Ιδιότητες συζυγών

I. Για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = \alpha + \beta i$ και $\overline{z} = \alpha - \beta i$ ισχύουν:

i. $z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$ **ii.** $z + \overline{z} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}(z)$ **iii.** $z - \overline{z} = 2\beta i = 2(\operatorname{Im}(z))i$

II. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τότε:

i. Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\overline{z} = z$

ii. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\overline{z} = -z$

III. Για τους μιγαδικούς z, z_1, z_2 ισχύουν

i. $\overline{\overline{z}} = z$

ii. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_\nu}$

iii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \ldots \overline{z_\nu}$ για κάθε $\nu \in N^*$.

iv. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$ **v.** $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

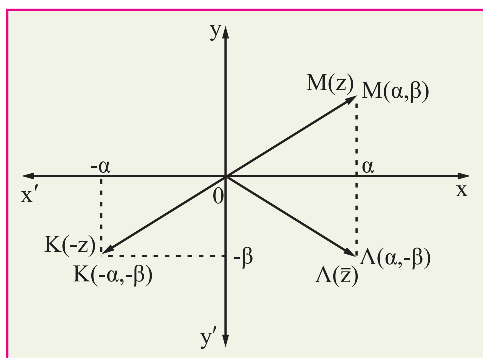
Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$. Στο μιγαδικό αριθμό z μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως σε κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$. Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού z συμβολίζεται τότε και με $\mathbf{M}(z)$ ή ακόμα με την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου $M(\alpha, \beta)$.

Ένα επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών λέγεται μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $z=\alpha+0i=\alpha$ ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών αριθμών $z=0+\beta i=\beta i$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $\Lambda(\alpha,-\beta)$ που είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών $z=\alpha+\beta i$ και $-z=-\alpha-\beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $K(-\alpha,-\beta)$ που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.



Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ (1) στο C με $\alpha,\beta,\gamma\in R$, και $\alpha\neq 0$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ (διακρίνουσα της (1))

- Αν $\Delta>0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $z=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$ (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται να γραφεί στην κανονική μορφή $\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta\in R$ ένας μιγαδικός αριθμός.
Εκτελούμε τις πράξεις όπως τις ορίσαμε στη θεωρία (Δυνάμεις - Ταυτότητες κ.λ.π)

Παράδειγμα 1

Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$ το μιγαδικό $z=\frac{5}{6}\left(\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}\right)$

Λύση

Είναι $z=\frac{5}{6}\left(\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}\right)=\frac{5}{6}\left[\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}\right]=\frac{5}{6}\left[\frac{4+4i-1+4-4i-1}{4+1}\right]=$

$=\frac{5}{6}\left(\frac{8-2}{5}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1=1+0i$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1,z_2 είναι ίσοι ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι ίσοι.
Γράφουμε τους z_1,z_2 στην κανονική τους μορφή $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ και διαπιστώνουμε ότι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$ ή απαιτούμε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$ όταν ζητούνται συνθήκες, ώστε να είναι ίσοι.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1=(-2\alpha+3\beta)+(2\alpha+\beta)i$ και $z_2=(3-i)i$ να είναι ίσοι.

Λύση

Είναι $z_2=(3-i)i=3i+1=1+3i$, $z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha+3\beta=1\\ 2\alpha+\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1\\ 2\alpha+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1\\ \alpha=1\end{cases}$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Υπολογισμός παραστάσεων με δυνάμεις του i (ακέραιος εκθέτης).

Η παράσταση i^ν ισούται με i^υ όπου υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν δια 4.

Επομένως οι δυνατές τιμές της παράστασης i^ν είναι $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τις τιμές της παράστασης Α για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν με

$$A = \frac{i^{10} + i^{50}}{i^{\nu+1}}.$$

Λύση

Είναι $i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = i^2 = -1$, $i^{50} = i^{4\cdot 12+2} = i^2 = -1$, $i^{\nu+1} = i^{\nu} \cdot i = i^{4\pi+\upsilon} i = i^{\upsilon} \cdot i$

-Για $\upsilon = 0$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{i} = \dfrac{-2}{i} = \dfrac{-2(-i)}{-i^2} = 2i$

-Για $\upsilon = 1$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-1} = 2$

-Για $\upsilon = 2$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-i} = \dfrac{-2}{-i} = \dfrac{-2i}{-i^2} = -2i$

-Για $\upsilon = 3$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-i \cdot i} = \dfrac{-2}{-i^2} = -2$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι συζυγείς.

Γράφουμε τους z_1, z_2 στην κανονική μορφή $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ και διαπιστώνουμε ότι $\alpha = \gamma$ και $\beta + \delta = 0$ ή απαιτούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$ να έχει λύση στην περίπτωση συνθήκης ώστε οι z_1, z_2 να είναι συζυγείς.

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + i^3(ix - 2y)$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{11}$ να είναι συζυγείς.

Λύση

Είναι $z_1 = 2 - i(ix - 2y) = (2 + x) + 2yi$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{4\cdot 2+3} = x^2 + 2yi^3 = x^2 - 2yi$.

Απαιτούμε $\begin{cases} 2 + x = x^2 \\ 2y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad ή \quad x = 2 \\ y \in R \end{cases}$

Άρα $(x, y) = (-1, \lambda)$, $\lambda \in R$ ή $(x, y) = (2, \kappa), \kappa \in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις όπου ζητείται να δειχθεί ότι ένας μιγαδικός έστω z είναι πραγματικός ή φανταστικός ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι z πραγματικός ή z φανταστικός.

α΄ τρόπος: Γράφουμε τον z στη μορφή $z = x + yi$ και διαπιστώνουμε ότι $y = 0$ ή $x = 0$ αντίστοιχα.

β΄ τρόπος: Διαπιστώνουμε ότι $z=\overline{z}$ ή απαιτούμε $z=\overline{z}$ όταν ζητούνται οι συνθήκες, ώστε $z\in R$ ή $z=-\overline{z}$, αν ζητείται ο z να είναι φανταστικός.

Παράδειγμα 5

i. Να δείξετε ότι για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και $\nu\in N^*$ ο $(\overline{z})^\nu+z^\nu$ είναι πραγματικός.

ii. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε ο αριθμός $\omega=\dfrac{3+\alpha i}{\beta-3i}$ να είναι φανταστικός.

Λύση

i. Έστω $\omega=(\overline{z})^\nu+z^\nu$, τότε $\overline{\omega}=\overline{(\overline{z})^\nu}+\overline{z^\nu}=\left(\overline{\overline{z}}\right)^\nu+(\overline{z})^\nu=z^\nu+(\overline{z})^\nu=\omega$. Άρα $\omega\in R$.

ii. Είναι $\omega=\dfrac{3+\alpha i}{\beta-3i}=\dfrac{(3+\alpha i)(\beta+3i)}{(\beta-3i)(\beta+3i)}=...=\dfrac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9}+\dfrac{9+\alpha\beta}{\beta^2+9}i$

Ο ω είναι φανταστικός αν $\dfrac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9}=0$ δηλαδή αν $\alpha=\beta$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Λύση εξίσωσης της μορφής $\alpha z=\beta$, $\alpha,\beta\in R$ ή $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ ή άλλης μορφής.

Η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ λύνεται με τη βοήθεια της διακρίνουσας όπως αναφέραμε στη θεωρία.

Για τις άλλες μορφές θέτουμε $z=x+yi$, εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε στη μορφή $\alpha+\beta i=0$. Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$. Επίσης η $\alpha z=\beta$ με $\alpha,\beta\in C$ μπορεί να λυθεί όπως ακριβώς και στο R.

Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(1+2i)(i-z)-(4i-3)(1-iz)=1+7i$

ii. $z^2-3\sqrt{3}\cdot z+9=0$

iii. $\overline{z}=3z-1$

Λύση

i. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$i-z+2i(i-z)-\left(4i-4i^2z-3+3iz\right)=1+7i \Leftrightarrow i-z-2-2iz-4i-4z+3-3iz=1+7i$$

$$\Leftrightarrow -3i-2+3+z(-1-2i-4-3i)=1+7i \Leftrightarrow z(-5-5i)=10i \Leftrightarrow -5z(1+i)=10i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{10i}{-5(1+i)}=\frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i+2i^2}{1+1}=\frac{-2-2i}{2}.$$ Άρα $z=-1-i$.

ii. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 9=27-36=-9<0$ οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z_{1,2}=\frac{3\sqrt{3}\pm i\sqrt{9}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\pm 3i}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pm\frac{3}{2}i$$

iii. Θέτουμε $z=x+yi$. Η εξίσωση $\overline{z}=3z-1$ γίνεται $x-yi=3(x+yi)-1\Leftrightarrow$

$$1+x-yi-3x-3yi=0\Leftrightarrow 1-2x-4yi=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x=0\\-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=0\end{cases}.$$

Άρα η λύση είναι $z=\frac{1}{2}$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις που ζητείται ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού αριθμού z τα Re(z) και Im(z) του οποίου δίνονται παραμετρικά ή δίνεται ισότητα που μας οδηγεί σε παραμετρικά Re(z) και Im(z).

Γράφουμε τον μιγαδικό z στην κανονική του μορφή και απαλείφουμε την παράμετρο από τα Re(z) και Im(z).

Παράδειγμα 7

Να βρείτε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z=(1+5i)\lambda+2-3i,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Ο μιγαδικός z γράφεται $z=\lambda+5\lambda i+2-3i=(\lambda+2)+(5\lambda-3)i$. Αν $z=x+yi$ τότε $x=\lambda+2$ και $y=5\lambda-3$. Προκύπτει λοιπόν $\lambda=x-2$ και $y=5(x-2)-3=5x-13$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση $y=5x-13$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να λυθούν οι ανισώσεις $P_1(z)\le P_2(z)$ ή $P_1(z)\ge P_2(z)$ όπου $P_1(z), P_2(z)$ παραστάσεις του z με $z\in C$.

Θέτουμε $z=\alpha+\beta i$. Φέρνουμε την ανίσωση στην μορφή $x+yi\ge 0$ ή $x+yi\le 0$ και απαιτούμε $y=0$ διότι η διάταξη δεν έχει νόημα στο C.

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η ανίσωση $3z-1\ge z+7\ (1),\ z\in C$.

Λύση

Αν $z=x+yi$ τότε $3(x+yi)-1\ge(x+yi)+7\Leftrightarrow(2x-8)+2yi\ge 0$ Πρέπει $y=0$ και η ανίσωση (1) γράφεται $2x-8\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$. Άρα λύση της (1) είναι $z=x+0i$ με $x\ge 4$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να καταλήξουμε από ισότητα μιγαδικών σε ισοδύναμη ισότητα διανυσμάτων

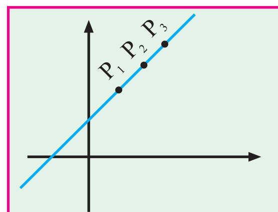
Παίρνουμε υπόψιν μας την εξής βασική πρόταση:

Αν ο λόγος δύο μιγαδικών z_1, z_2 είναι πραγματικός τότε οι εικόνες τους M_1, M_2 και η αρχή των αξόνων O είναι σημεία συνευθειακά.

Απόδειξη: $\frac{z_1}{z_2} = k,\ k \in R \Leftrightarrow z_1 = kz_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM_2}$ άρα τα O, M_1, M_2 συνευθειακά.

Παράδειγμα 9

Αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα συνευθειακά σημεία P_1, P_2, P_3 να δείξετε ότι $w = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in R$ **.**



Λύση

Είναι $\overrightarrow{P_1P_2} = \kappa\overrightarrow{P_1P_3}$, $\kappa \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \kappa\left(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}\right) \Leftrightarrow$

$z_2 - z_1 = \kappa\left(z_3 - z_1\right) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \kappa$ είναι προφανές ότι $w \in R$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο

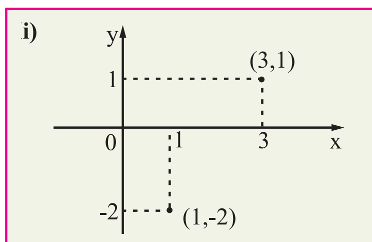
i. **τους μιγαδικούς:** $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$

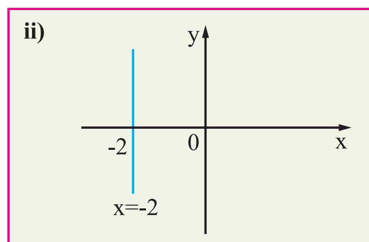
ii. **τους μιγαδικούς z με** $\text{Re}(z) = -2$

iii. **τους μιγαδικούς z με** $\text{Im}(z) = 1$

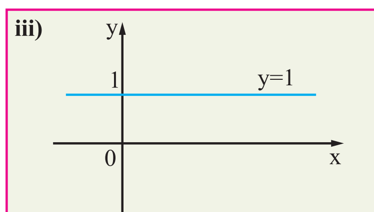
iv. **τους μιγαδικούς z με** $-2 \le \text{Re}(z) \le 2$

Λύση

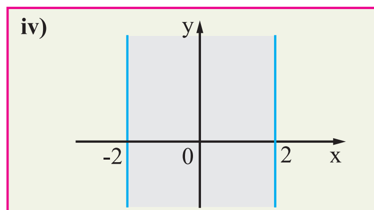




Οι μιγαδικοί με $\text{Re}(z) = -2$ είναι οι αριθμοί της μορφής $-2 + yi$, με $y \in R$. Άρα, ανήκουν στην ευθεία $x = -2$



Οι μιγαδικοί με $\mathrm{Im}(z)=1$ είναι της μορφής $x+i$, $x \in R$ άρα παριστάνονται με τα σημεία $(x,1)$, όπου $x \in R$. Είναι δηλαδή τα σημεία της ευθείας $y=1$.



$-2 \le \mathrm{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $x=-2$ και $x=2$ ή πάνω στις δύο ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τον $\alpha \in R$ **ώστε να ισχύει:** $1+2\sqrt{2}i = 3\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$.

Λύση

Είναι $1+2\sqrt{2}i = 3\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i} \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}i = 3\dfrac{(1+\alpha i)^2}{(1-\alpha i)(1+\alpha i)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}i = 3\frac{1-\alpha^2+2\alpha i}{1+\alpha^2} \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}i = \frac{3(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \frac{6\alpha}{1+\alpha^2}i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} = 1 \\ \dfrac{6\alpha}{1+\alpha^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3\alpha^2 = 1+\alpha^2 \\ 6\alpha = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 = 2 \\ 2\sqrt{2}\alpha^2 - 6\alpha + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2}\alpha^2 - 6\alpha + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$$

Άρα $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Άσκηση 3

Αν $z_1, z_2 \in C$ **τότε** $z_1 \cdot z_2 = 0$ **αν και μόνο αν** $z_1 = 0$ **ή** $z_2 = 0$

Λύση

Έστω $z_1 \cdot z_2 = 0$. Αν $z_1 \in C$ και $z_1 \ne 0$ τότε ορίζεται ο $\dfrac{1}{z_1}$.

Επειδή $z_1 \cdot z_2 = 0$, έχουμε $z_2 = \dfrac{1}{z_1}\cdot(z_1 \cdot z_2) = \dfrac{1}{z_1}\cdot 0 = 0$.

Όμοια αν $z_2 \neq 0$ τότε $z_1 = 0$. Άρα $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$.

Αντίστροφα αν $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$ τότε προφανώς $z_1 z_2 = 0$.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta i)^{2002} + (\beta-\alpha i)^{2002} = 0 \quad (1)$

Λύση

Προφανώς σε τέτοιες ασκήσεις πρέπει να αναζητηθεί κάποιος μετασχηματισμός ώστε να δειχθεί ότι πρόκειται για άθροισμα αντίθετων αριθμών.

Έχουμε: $(\beta-\alpha i)^{2002} = \left[-(\alpha i-\beta)\right]^{2002} = (\alpha i-\beta)^{2002} = \left(\alpha i+\beta i^2\right)^{2002} =$

$= \left[i(\alpha+\beta i)\right]^{2002} = i^{2002}(\alpha+\beta i)^{2002}$ Όμως $i^{2002} = i^{2000}\cdot i^2 = \left(i^4\right)^{500}\cdot i^2 = i^2 = -1$

Άρα $(\beta-\alpha i)^{2002} = -(\alpha+\beta i)^{2002}$. Οπότε η ισότητα (1) ισχύει.

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση $z^2 = \dfrac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i}$ (1), **με** $z \in C$.

Λύση

Έστω $z = x+yi$. Τότε η (1) γράφεται $(x+yi)^2 = \dfrac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = \dfrac{\left(20\sqrt{3}-12i\right)\left(\sqrt{3}+9i\right)}{\left(\sqrt{3}-9i\right)\left(\sqrt{3}+9i\right)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = 2+2\sqrt{3}i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ 2xy=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{x^2}=2 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^4-2x^2-3=0 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases}$$

Οι λύσεις της $x^4-2x^2-3=0$ είναι $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$. Άρα $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases}$.

Επομένως οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι: $z_1 = \sqrt{3}+i$ ή $z_2 = -\sqrt{3}-i$

Άσκηση 6

Αν $z = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **και** $\alpha,\beta \in R$ **να δείξετε ότι ο** $z_1 = \left(\alpha z^2+\beta z\right)\cdot\left(\beta z^2+\alpha z\right)$ **είναι πραγματικός.**

Λύση

Είναι $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z}$

Άρα, $z_1=(\alpha\bar{z}+\beta z)\cdot(\beta\bar{z}+\alpha z)=\alpha\beta\bar{z}^2+\alpha^2\cdot z\bar{z}+\beta^2\cdot z\bar{z}+\alpha\beta z^2=\alpha\beta\left(\bar{z}^2+z^2\right)+z\bar{z}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ (1)

Όμως $\bar{z}^2=\left(\overline{z^2}\right)=\left(\overline{\bar{z}}\right)=z$ οπότε $\bar{z}^2+z^2=z+\bar{z}$

Αν $z=x+yi$ τότε $z+\bar{z}=2x\in R$ ενώ $z\bar{z}=x^2+y^2\in R$

Επειδή και $\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2\in R$ από την (1) προκύπτει ότι ο z_1 ανήκει στο R.

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) στο μιγαδικό επίπεδο αν ισχύει $z^3\geq 1$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$. Τότε $z^3=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3=$

$=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i=\left(x^3-3xy^2\right)+\left(3x^2y-y^3\right)i$

Επειδή $z^3\geq 1$ απαιτούμε $z^3\in R$.

Σχόλιο: Όπου τίθεται θέμα διάταξης γίνεται παραπομπή στο R αφού στο C δεν έχει νόημα η διάταξη.

Για να ισχύει $z^3\in R$ πρέπει $3x^2y-y^3=0\Leftrightarrow y\left(3x^2-y^2\right)=0\Leftrightarrow y=0$ ή $3x^2-y^2=0$.

i. Αν $y=0$ τότε $z^3=x^3$ και επειδή $z^3\geq 1$ πρέπει $x^3\geq 1$, άρα $x\geq 1$.

Άρα σ'αυτήν την περίπτωση ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία $y=0$ με $x\geq 1$.

ii. Αν $3x^2-y^2=0$ τότε $y^2=3x^2$ (1). Άρα $y=\sqrt{3}x$ ή $y=-\sqrt{3}x$ και επειδή $z^3\geq 1$ πρέπει

$x^3-3xy^2\geq 1$ και λόγω (1) $x^3-9x^3\geq 1$. Άρα $-8x^3\geq 1$, άρα $x\leq -\frac{1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός τόπος είναι οι ημιευθείες $y=\sqrt{3}x$ με $x\leq -\frac{1}{2}$ και $y=-\sqrt{3}x$ με $x\leq -\frac{1}{2}$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε το μιγαδικό $\omega=\dfrac{z}{z+2}$ όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$.

α. Να γράψετε τον ω στη μορφή $\alpha+\beta i$ όπου $\alpha,\beta\in R$

β. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία

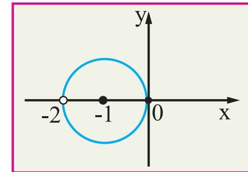
i. ο ω είναι φανταστικός, ii. ο ω είναι πραγματικός

Λύση

α. Για να γράψουμε τον ω στη μορφή $\alpha+\beta i$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγή του παρονομαστή. Πρέπει $z\neq -2$ δηλαδή με $z=x+yi$ είναι $x\neq -2$ ή $y\neq 0$.

Έχουμε: $\omega=\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{x+yi}{x+2+yi}=\dfrac{(x+yi)\left[(x+2)-yi\right]}{(x+2+yi)(x+2-yi)}=\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}+\dfrac{2y}{(x+2)^2+y^2}i$

β.i. Ο ω είναι φανταστικός αν $\text{Re}(\omega)=0$.



Είναι $\text{Re}(\omega)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=1$.
Άρα, ο ω είναι φανταστικός όταν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $(x+1)^2+y^2=1$ με κέντρο $(-1,0)$ και ακτίνα 1, από τον οποίο εξαιρείται το σημείο $(-2,0)$, διότι, αν $x=-2$ και $y=0$ είναι $z=-2$.

ii. Ο ω είναι πραγματικός αν $\text{Im}(\omega)=0\Leftrightarrow 2y=0\Leftrightarrow y=0$ δηλαδή η εικόνα Μ του μιγαδικού z ανήκει στην ευθεία $y=0$ (ο άξονας $x'x$) με εξαίρεση το σημείο $(-2,0)$.

Άσκηση 9

Έστω το πολυώνυμο $P(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0$. Να δείξετε ότι αν το P(z) έχει ρίζα το z_0 τότε έχει ρίζα και το συζυγή του, δηλαδή τον $\overline{z_0}$.

Λύση

Επειδή ο z_0 είναι ρίζα του $P(z)$ ισχύει $P(z_0)=0$.

Έχουμε $P\left(\overline{z_0}\right)=\alpha_\nu\overline{z_0}^\nu+\ldots+\alpha_1\overline{z_0}+\alpha_0=\overline{\alpha_\nu z_0^\nu+\ldots+\alpha_1 z_0+\alpha_0}=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0$.

Άρα ο $\overline{z_0}$ είναι ρίζα του $P(z)$.

Άσκηση 10

Έστω το τριώνυμο $P(z)=\alpha z^2+\beta z+\gamma$ με $\alpha\neq 0$, διακρίνουσα $\Delta<0$ και α, β, $\gamma\in R$ ενώ ο $z\in C$. Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της $P(z)=0$:

α. Να δείξετε ότι $(z_1+z_2)\in R$.

β. Να δείξετε ότι $\left(z_1^\nu+z_2^\nu\right)$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Με $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι $d(A,B)=\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$.

δ. Αν $\Gamma(z_1+z_2)$ η εικόνα του z_1+z_2 τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$E_{(AB\Gamma)}=\frac{|\beta|\sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}.$$

Λύση

α. Τρόπος 1: $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ που ανήκει στο R από υπόθεση

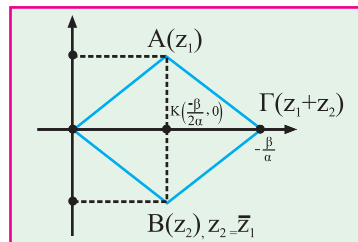
Τρόπος 2: Οι z_1, z_2 είναι συζυγείς (δηλαδή $\overline{z_1}=z_2$) άρα $z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2\text{Re}(z_1)$

β. $z_1^\nu + z_2^\nu = z_1^\nu + \overline{z}_1^\nu = z_1^\nu + \overline{z_1^\nu} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1^\nu\right) \in R$

γ. $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$ άρα $A = \left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)$ και

$B = \left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)$ συνεπώς

$d(A,B) = \left|\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} - \left(\dfrac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)\right| = \left|\dfrac{2\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right| = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$



δ. $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ οπότε είναι $E_{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{2} AB \cdot K\Gamma = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}\left|-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right| = \dfrac{|\beta|\sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σ(σωστό) ή Λ(Λάθος).

Α. Έστω $z = \alpha + \beta i$ τότε ισχύουν

i. $z + \overline{z} = 2\beta i$ **ii.** $z - \overline{z} = 2\alpha$ **iii.** $\left(\overline{\overline{z}}\right) = z$

iv. $(\alpha + \beta i)^2 = -i(\beta - \alpha i)^2$ **v.** $(\alpha + \beta i)^2 = \overline{(\alpha - \beta i)^2}$

Β. Αν $z \in C$ και $z + 2i = 5 + \lambda i,\ \lambda \in R$ τότε $z = 5$ και $\lambda = -2$

Γ. i. $i^{2003} = i$ **ii.** $\dfrac{i^3}{i} = 1$ **iii.** $\dfrac{i^{22}+1}{i^\nu} = 0$

(**Απ: Α. i.** Λ, **ii.** Λ, **iii.** Σ, **iv.** Λ, **v.** Σ, **Β.** Λ, **Γ. i.** Λ, **ii.**Λ, **iii.** Σ)

2. Ο μιγαδικός $z = \dfrac{2-i}{1+2i}$ είναι ίσος με:

α. $2i$ **β.** i **γ.** $-i$ **δ.** $-2i$ **ε.** $3i$

(**Απ: γ.**)

3. Οι εικόνες των z, $-\overline{z}$, $\overline{z}$, $-z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές

α. τετραγώνου **β.** ρόμβου **γ.** τραπεζίου **δ.** ορθογωνίου

(**Απ: δ.**)

4. Να γράψετε σε κανονική μορφή τους μιγαδικούς.

α. $\dfrac{5-2i}{1-2i}$ **β.** $\dfrac{2+3i}{4+i}$ **γ.** $\dfrac{3i}{i-7}$

(**Απ: α.** $\dfrac{9}{5} + \dfrac{8}{5}i$, **β.** $\dfrac{11}{17} + \dfrac{10}{17}i$, **γ.** $\dfrac{3}{50} - \dfrac{21}{50}i$)

5. Αν $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 3-2i$ να βρείτε τους μιγαδικούς:

i. $z_1 + z_2$ **ii.** $z_1 \cdot z_2$ **iii.** $\frac{z_1}{z_2}$ **iv.** $\frac{{z_1}^2}{{z_2}^2}$

(**Απ: i.** $5-i$, **ii.** $8-i$, **iii.** $\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$, **iv.** $\frac{-33}{169}+\frac{56}{169}i$)

6. Να υπολογίσετε τους $\alpha,\beta \in R$ ώστε οι μιγαδικοί $z = -3+(2\alpha-\beta)i$ και $w = \alpha - 5\beta - 3i$ να είναι συζυγείς.

(**Απ:** $\alpha = 2$, $\beta = 1$)

7. Αν $z \in C$ και $z^2 = \overline{z}^2$ να δείξετε ότι $z \in I$ ή $z \in R$.

8. Να βρείτε τους $\alpha,\beta \in R$ ώστε να ισχύει $(i-\alpha)^2 - (i+\alpha)^2 + \beta + 1 = \frac{1}{i}$.

(**Απ:** $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = -1$)

9. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 + z_2 \neq 0$ και $z = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$. Να δείξετε ότι $z \in R \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z}_2 \in R$.

10. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:

i. $z^2 - 2z + 2 = 0$ **ii.** $4z^2 + 4z + 5 = 0$ **iii.** $2z + \overline{z} - 1 = 0$ **iv.** $2z + 1 = 3\overline{z}$

(**Απ: i.** $z_2 = 1 - i$ **ii.** $z_2 = -\frac{1}{2} - i$ **iii.** $z = \frac{1}{3} + 0i$ **iv.** $z_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{35}4}{i}$ και $z_4 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{35}}{4}i$)

11. Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{1-z_1}{1-\overline{z}_1}$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να βρεθούν οι z_1 και z_2 ώστε $z_1 - z_2$ και z_2^2 να είναι πραγματικοί.

(**Απ:** $\beta = 0$ και $\alpha \in R, \alpha \neq -1$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = \pm\sqrt{3}$)

12. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z = 5\sigma\upsilon\nu\varphi + 3\eta\mu\varphi i$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(**Απ:** Έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$)

13. Έστω $z \in C$ με $z \neq 2$. Αν $w = \frac{z-4i}{z-2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $w \in R$.

(**Απ:** $2x + y = 4$ εκτός του (2, 0))

14. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z = x + yi$ αν $z\overline{z} - \left(z^2 + \overline{z}^2\right) + 1 = 0$.

(**Απ:** Υπερβολή $x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$)

15. Έστω $z \in C$ με $z \neq i$. Αν ο αριθμός $w = \frac{z}{z^2+1}$ είναι φανταστικός. Να βρεθεί ο γ. τόπος του z.

(**Απ:** ο άξονας y΄y, εκτός των σημείων (0, 1) και (0, -1))

16. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = (1+2i)k + 1 - i,\ k \in R$ και M(z) η εικόνα του z

i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M(z)

ii. Να βρεθεί το k ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

(**Απ:** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ και $k = \frac{1}{5}$)

17. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in R$. Αν $w = \frac{z+8i}{z+6}$ και $Re(w) = 0$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος που περνά από την αρχή των αξόνων.

18. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει: $z^2 - 1 \geq 0$.

(**Απ:** $z \in R$, $z \leq -1$ ή $z \geq 1$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω $z \in C$ με $z = εφθ + i\frac{1}{συνθ}$ όπου $θ \in \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Β. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 = z_2 + \frac{1}{z_2}$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $ρ \neq 1$ τότε να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z_1 ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

Γ. Αν $z^3 = 1$ και $z \notin R$ τότε

α. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z.

β. Να δείξετε ότι $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 4$

γ. Να δείξετε ότι $(1-z)(1-z^2)(1-z^4)(1-z^5) = 9$

(**Απ.: Α.** Το τμήμα της ισοσκελούς υπερβολής $y^2 - x^2 = 1$ πάνω από τον $x'x$,

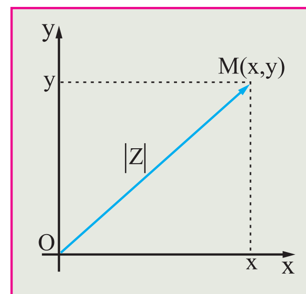
Β. $\frac{x^2}{\left(\frac{ρ^2+1}{ρ}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ρ^2-1}{ρ}\right)^2} = 1$, $E'(-2,0)$, $E(2,0)$, **Γ.** $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$)

Μάθημα 2

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μέτρο μιγαδικού αριθμού



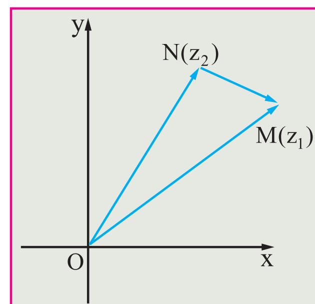
Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $M(z)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού z την απόσταση του $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων και συμβολίζουμε $|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

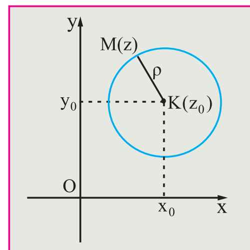
Ιδιότητες του μέτρου

- Έστω $z = x + yi$ τότε $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Για κάθε μιγαδικό $z = x + yi$ ισχύει $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και γενικότερα

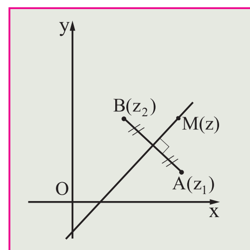
  $|z_1 \cdot z_2 ... z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| ... |z_\nu|$ και $|z^\nu| = |z|^\nu$ $\quad \nu \in N^*$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ τότε $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
- Αν $z_1, z_2 \in C$ τότε $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)
- Για τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, ισχύει ακόμα

  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$ ή $|\overrightarrow{MN}| = |z_1 - z_2|$ δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με τήν απόσταση των εικόνων τους.





- Έστω ο μιγαδικός $z_0 = x_0 + y_0 i$ και ένας θετικός πραγματικός ρ. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $K(x_0, y_0)$ του z_0 και ακτίνα ρ.



- Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις όπου ζητείται το μέτρο ενός μιγαδικού ή το μέτρο μιας παράστασης μιγαδικών αριθμών.

α. Φέρνουμε τον μιγαδικό αριθμό ή την παράσταση στην κανονική μορφή $x + yi$ οπότε υπολογίζουμε εύκολα το μέτρο που είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$

β. Όταν η παράσταση προσφέρεται εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του μέτρου.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: i. $z_1 = \dfrac{4+3i}{4-3i}$ **ii.** $z_2 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

α΄ τρόπος

i. $z_1 = \dfrac{4+3i}{4-3i} = \dfrac{(4+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{16-9+24i}{25} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{24}{25}i$.

Οπότε $|z_1| = \sqrt{\dfrac{7^2}{25^2} + \dfrac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\dfrac{49+576}{625}} = 1$

β΄ τρόπος

$|z_1| = \left|\dfrac{4+3i}{4-3i}\right| = 1$, (Αφού $|4+3i| = |\overline{4+3i}| = |4-3i|$)

ii. $|z_2| = \left|\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right|^{\nu} = \left(\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}}\right)^{\nu} = 1^{\nu} = 1$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις όπου ζητείται να λυθούν εξισώσεις ή ανισώσεις που περιέχουν μέτρα μιγαδικών.

α. Θέτουμε $z = x + yi$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου και οδηγούμαστε έτσι σε άρρητες εξισώσεις με άγνωστους τους $x, y \in R$ τους οποίους και προσδιορίζουμε.

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο κατά μέλη κάνοντας χρήση της ιδιότητας $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ή γενικότερα $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

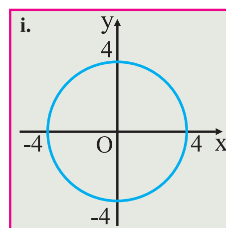
γ. Μπορούμε να λύσουμε γεωμετρικά τις εξισώσεις - ανισώσεις λαμβάνοντας υπόψη μας την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου.

Παράδειγμα 2

Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία στα επόμενα:

i. $|\overline{z}| = 4$ **ii.** $|4z + 8i + 4| = 4$ **iii.** $2 < |z - 1 + 2i| < 3$ **iv.** $|z - 2| = |z - 3i|$

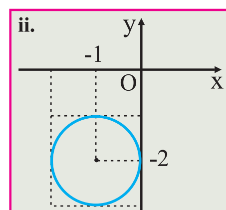
Λύση



i. Έστω $z = x + yi$ και επειδή $|\overline{z}| = 4$ έχουμε:

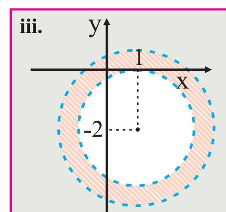
$$|x - yi| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2.$$

Άρα το σημείο M(z) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$



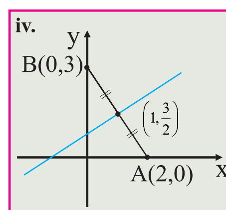
ii. Είναι $|4z + 8i + 4| = 4 \Leftrightarrow |z - (-1 - 2i)| = 1$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, -2)$ και $\rho = 1$



iii. Έχουμε $|z - (1 - 2i)| > 2$ και $|z - (1 - 2i)| < 3$ (2)

Η ανίσωση (1) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται έξω από τον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 2. Η ανίσωση (2) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 3. Άρα η δοθείσα ανίσωση παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του δακτυλίου που ορίζουν αυτοί οι ομόκεντροι κύκλοι.



iv. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει την μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία A(2,0) και B(0,3). Για να βρούμε την εξίσωση της θέτουμε $z = x + yi$ οπότε:

$$|z - 2| = |z - 3i| \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = |x + (y - 3)i|$$

$$|(x - 2) + yi|^2 = |x + (y - 3)i|^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6y \Leftrightarrow -4x + 6y = 5$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου ζητείται να αποδειχτεί μια ισότητα ή ανισότητα μέτρων με ή χωρίς συνθήκες.

α. Θέτουμε $z = x + yi$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου.

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ή $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

Σημείωση: Όταν μας δίνεται ως συνθήκη $|f(z)| = 1$ όπου $z \in C$ τότε ισχύουν οι σχέσεις

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |f(z)|^2 = 1 \Leftrightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = 1$ οπότε $f(z) = \dfrac{1}{\overline{f(z)}}$ ή $\overline{f(z)} = \dfrac{1}{f(z)}$.

(Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 1)

Τα πιο πάνω ισχύουν και γενικότερα αν $|f(z)| = \alpha$, $\alpha \in R$ οπότε:

$|f(z)|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = \alpha^2$ οπότε $f(z) = \dfrac{\alpha^2}{\overline{f(z)}}$ ή $\overline{f(z)} = \dfrac{\alpha^2}{f(z)}$

(βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 2).

Παράδειγμα 3

Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|3z - 9| = |z - 11|$ **να δείξετε ότι** $|z - 2| = 3$

Λύση

Ισχύει: $|3z - 9| = |z - 11| \Leftrightarrow |3z - 9|^2 = |z - 11|^2 \Leftrightarrow (3z - 9)\overline{(3z - 9)} = (z - 11)\overline{(z - 11)} \Leftrightarrow$

$$(3z - 9)(3\overline{z} - 9) = (z - 11)(\overline{z} - 11) \Leftrightarrow 9z\overline{z} - 27z - 27\overline{z} + 81 = z\overline{z} - 11z - 11\overline{z} + 121$$

$$\Leftrightarrow 8z\overline{z} - 16\overline{z} - 16z - 40 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - 2\overline{z} - 2z - 5 = 0 \qquad (1)$$

Έχουμε ακόμα: $|z - 2| = 3 \Leftrightarrow |z - 2|^2 = 9 \Leftrightarrow (z - 2)(\overline{z} - 2) = 9$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} - 5 = 0$ που ισχύει απο (1).

Άρα αν $|3z - 9| = |z - 111|$ τότε $|z - 2| = 3$

Παράδειγμα 4

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 **και** $\kappa \in R$ **με** $\kappa > 0$.

Να δείξετε ότι: $|z_1 + z_2|^2 \le (1 + \kappa) \cdot |z_1|^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\kappa}\right)|z_2|^2$.

Λύση

α΄ τρόπος

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$

Έχουμε: $|z_1 + z_2|^2 \le (1 + k) \cdot |z_1|^2 + \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$|(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i|^2 \le (1 + \kappa)|\alpha + \beta i|^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \cdot |\gamma + \delta i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2 \le (1+\kappa)(\alpha^2+\beta^2)+\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)(\gamma^2+\delta^2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma+\beta^2+\delta^2+2\beta\delta \le \alpha^2+\beta^2+\kappa\alpha^2+\kappa\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\frac{\gamma^2}{\kappa}+\frac{\delta^2}{\kappa} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\gamma+2\beta\delta \le \kappa\alpha^2+\kappa\beta^2+\frac{\gamma^2}{\kappa}+\frac{\delta^2}{\kappa} \quad (\kappa>0) \Leftrightarrow 2\alpha\kappa\gamma+2\beta\kappa\delta \le \kappa^2\alpha^2+\kappa^2\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa^2\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\kappa\gamma)+(\kappa^2\beta^2+\delta^2-2\beta\kappa\delta) \ge 0 \Leftrightarrow (\kappa\alpha-\gamma)^2+(\kappa\beta-\delta)^2 \ge 0$$ που αληθεύει

β΄ τρόπος

Επειδή $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ αρκεί να δείξουμε ότι: $(|z_1|+|z_2|)^2 \le (1+\kappa)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)|z_2|^2$ (1)

Πράγματι η (1) γίνεται $|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \le |z_1|^2+\kappa|z_1|^2+|z_2|^2+\frac{1}{\kappa}|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$\kappa^2|z_1|^2+|z_2|^2-2\kappa|z_1||z_2| \ge 0 \Leftrightarrow (\kappa|z_1|-|z_2|)^2 \ge 0$$ που ισχύει.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μέτρου $|f(z)|$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα ή τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου μιγαδικού. $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Παράδειγμα 5

Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και $\omega=3+4i$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+\omega|$.

Λύση

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ έχει κέντρο το O(0,0) και $\rho=1$. Αφού το M(z) ανήκει στον κύκλο ισχύει $|z|=1$. Επίσης $|\omega|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z|-|\omega|| \le |z+\omega| \le |z|+|\omega| \quad ή \quad |1-5| \le |z+\omega| \le 1+5 \quad ή \quad 4 \le |z+\omega| \le 6$$

Άρα η μέγιστη τιμή του $|z+\omega|$ είναι 6, ενώ η ελάχιστη 4.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν $|z-3| \le 1$ (1)

Λύση

Είναι $|z|=|(z-3)+3| \le |z-3|+3 \overset{(1)}{\le} 1+3=4$.

Επίσης: $|z|=|(z-3)+3| \ge ||z-3|-|3|| \overset{(1)}{\ge} |1-3|=2$ Άρα: $2 \le |z| \le 4$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 **ισχύει:** $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ **και** $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ **να δείξετε ότι:**

α. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$

β. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 **είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμένου σε κύκλο ακτίνας 1.**

γ. $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$

δ. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

Λύση

α. Όταν $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ (1) οπότε:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \text{ λόγω της (1).}$$

β. Για να δείξουμε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 - z_3$ οπότε

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - (-z_1 - z_3)| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3| \Leftrightarrow$$

$$|2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)\overline{(2z_1 + z_3)} = (z_1 + 2z_3)\overline{(z_1 + 2z_3)}$$

$$\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\overline{z_1} + \overline{z_3}) = (z_1 + 2z_3)(\overline{z_1} + 2\overline{z_3}) \Leftrightarrow$$

$$4z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + 4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2 + 4|z_3|^2 \Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3| \text{ που ισχύει:}$$

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Ομοίως αποδεικνύουμε και τις άλλες ισότητες οπότε το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες M_1, M_2, M_3 των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα είναι ισόπλευρο.

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ το $M_1M_2M_3$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$.

γ. Από την σχέση (α) έχουμε:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \Leftrightarrow \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0 \Leftrightarrow z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2=0 \quad (2)$$

δ. Επειδή $z_1+z_2+z_3=0$ τότε και

$$(z_1+z_2+z_3)^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_1z_3=0$$

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} z_1^2+z_2^2+z_3^2=0.$$

Επειδή $z_1+z_3=-z_2$, έχουμε: $z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=0 \Leftrightarrow z_2(z_1+z_3)+z_1z_3=0 \Leftrightarrow$

$$z_2(-z_2)+z_1z_3=0 \Leftrightarrow -z_2^2+z_1z_3=0 \Leftrightarrow z_2^2=z_1z_3 \Leftrightarrow z_2^2\cdot z_2=z_1z_2z_3 \Leftrightarrow z_2^3=z_1z_2z_3$$

Όμοια δείχνουμε ότι $z_1^3=z_1z_2z_3$ και $z_3^3=z_1z_2z_3$. Άρα $z_1^3=z_2^3=z_3^3$.

Άσκηση 2

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=\alpha$, $\alpha\in R_+^*$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w με $w=\frac{z-\alpha}{z+\alpha}$ είναι φανταστικός.

Λύση

Για να δείξουμε ότι $w\in I$ αρκεί να δείξουμε ότι $w=-\overline{w}$

Είναι: $\overline{w}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)}=\frac{\overline{z-\alpha}}{\overline{z+\alpha}}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{z}+\overline{\alpha}}=\frac{\overline{z}-\alpha}{\overline{z}+\alpha}$ (1) διότι $\overline{\alpha}=\alpha$ αφού $\alpha\in R_+^*$.

Επίσης $|z|=\alpha \Leftrightarrow |z|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow z\overline{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{\alpha^2}{z}$ οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\overline{w}=\frac{\frac{\alpha^2}{z}-\alpha}{\frac{\alpha^2}{z}+\alpha}=\frac{\frac{\alpha^2-\alpha z}{z}}{\frac{\alpha^2+\alpha z}{z}}=\frac{\alpha(\alpha-z)}{\alpha(\alpha+z)}=\frac{\alpha-z}{\alpha+z}=-\frac{z-\alpha}{z+\alpha}=-w$$

. Δηλαδή $\overline{w}=-w \Leftrightarrow w$ φανταστικός

Άσκηση 3

Αν ισχύει ότι $\left|\frac{z+|z|}{2}\right|+\left|\frac{z-|z|}{2}\right|=|z|$ τότε ο z είναι πραγματικός.

Λύση

(Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε)

$$(z+|z|)(\overline{z}+|z|)+(z-|z|)(\overline{z}-|z|)+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z}+z|z|+\overline{z}|z|+|z|^2+z\overline{z}-z|z|-\overline{z}|z|+|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+|z|^2+|z|^2+|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow 4|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$2\left|z^2-|z|^2\right|=0 \Leftrightarrow z^2-|z|^2=0 \Leftrightarrow |z|^2=z^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=z^2 \Leftrightarrow z(z-\bar{z})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ή} \\ z=\bar{z} \end{cases}$$

Άρα $z \in R$.

Άσκηση 4

Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0$ όπου $\alpha \geq 0$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$, $x,y \in R$

Είναι $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-2i(x+yi)+2\alpha(1+i)=0 \Leftrightarrow$

$$\left(x^2+y^2+2y+2\alpha\right)+2(\alpha-x)i=0+0i \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2+2y+2\alpha=0 \\ 2(\alpha-x)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y^2+2y+2\alpha+\alpha^2=0 \\ x=\alpha \end{matrix}$$

Επειδή $y \in R$ πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4-4\left(\alpha^2+2\alpha\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha^2-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$-1-\sqrt{2} \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$ και επειδή $\alpha \geq 0$ είναι $0 \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$.

Έτσι $y_{1,2}=\dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4\left(\alpha^2+2\alpha\right)}}{2}=\dfrac{-2 \pm 2\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}}{2}=-1 \pm \sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}$.

Άρα οι λύσεις τις εξίσωσης είναι

$z_1=\alpha+\left(-1+\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}\right)i$ και

$z_2=\alpha+\left(-1-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}\right)i$

με την προϋπόθεση $0 \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$.

α	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\alpha^2+2\alpha-1$		+	0	-	0	+	

Άσκηση 5

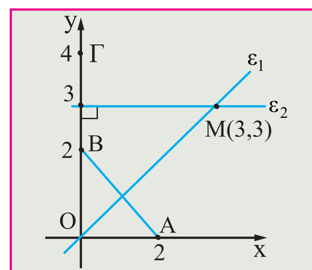
Να προσδιορίσετε τα σημεία M(z) του επιπέδου όταν ο αριθμός z ικανοποιεί τη σχέση $|z-4i|=|z-2|=|z-2i|$

Λύση

Εφ'όσον ο z ικανοποιεί την ισότητα $|z-2|=|z-2i|$ το M(z) θα βρίσκεται στην μεσοκάθετη του τμήματος AB όπου A(2,0) και B(0,2), δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_1: y=x \quad (1)$.

Εφ'όσον ο z ικανοποιεί τη σχέση $|z-4i|=|z-2i|$ το M(z) θα βρίσκεται στη μεσοκάθετη του τμήματος ΒΓ όπου B(0,2) και Γ(0,4), δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_2 : y=3\ (2)$.

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) δηλαδή $\begin{cases} y=x \\ y=3 \end{cases}$ και βρίσκουμε ότι το M(z) είναι το (3,3) και είναι μοναδικό.



Άσκηση 6

Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1+\overline{z_2}|=|\overline{z_1}-z_2|$ να δείξετε ότι ο $z_1 \cdot z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

Λύση

Επειδή $|z_1+\overline{z_2}|=|\overline{z_1}-z_2|$ έχουμε $|z_1+\overline{z_2}|^2=|\overline{z_1}-z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1+\overline{z_2}})=(\overline{z_1}-z_2)(\overline{\overline{z_1}-z_2}) \Leftrightarrow (z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}+z_2)=(\overline{z_1}-z_2)(z_1-\overline{z_2})$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_1z_2+\overline{z_1}\overline{z_2}+\overline{z_2}z_2=z_1\overline{z_1}-z_2z_1-\overline{z_2}\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow 2z_1z_2=-2\overline{z_1}\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2=-\overline{z_1z_2}.$$

Άρα $z_1z_2 \in I$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις:

$$|z|=1\quad (1)\quad \textbf{και}\quad |z-1|=2|z+1|\quad (2)$$

Λύση

Θέτουμε $z=x+yi$, $x,y\in R$. Από την (1) έχουμε $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \quad (3)$.

Από την (2) έχουμε $|(x-1)+yi|=2|(x+1)+yi| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4\left[(x+1)^2+y^2\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=4(x^2+2x+1+y^2)$ που λόγω της (3) γράφεται $1-2x+1=4(1+2x+1)$.

Άρα $x=-\frac{3}{5}$ οπότε $y^2=\frac{16}{25} \Leftrightarrow y=\frac{4}{5}$ ή $y=-\frac{4}{5}$.

Έτσι οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι $z_1=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ ή $z_2=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

Άσκηση 8

Αν $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|=1$, $z\in C$ με $z\neq 0$, να δειχθεί ότι $|z|+\frac{1}{|z|}\leq\sqrt{5}$.

Λύση

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$|z|+\frac{1}{|z|}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(|z|+\frac{1}{|z|}\right)^2\le\sqrt{5}^2\Leftrightarrow|z|^2+\frac{1}{|z|^2}+2|z|\frac{1}{|z|}\le 5\Leftrightarrow|z|^2+\frac{1}{|z|^2}\le 3\quad(1)$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (1).

Από υπόθεση έχουμε $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|=1$ και επειδή $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|\ge\left||z|-\left|\frac{1}{z}\right|\right|$ έχουμε $1\ge\left(|z|-\left|\frac{1}{z}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\ge|z|^2+\frac{1}{|z|^2}-2\Leftrightarrow 3\ge|z|^2+\frac{1}{|z|^2}$. Επομένως η (1) ισχύει.

Άσκηση 9

Αν $z_1,\ z_2\in C$ και $z_1,\ z_2\neq 0$ να δειχθεί ότι $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}>0$.

Λύση

α΄ τρόπος (γεωμετρικά)

Έστω $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ οι εικόνες των $z_1,\ z_2$, τότε:

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}|=|\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{OM_2}|\Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM_1}=\kappa\overrightarrow{OM_2}$ με $\kappa>0\Leftrightarrow z_1=\kappa z_2\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=\kappa>0$, με $\kappa\in R$.

β΄ τρόπος (αλγεβρικά)

Είναι $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

$$|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=2|z_1||z_2|\ (1)$$

Υψώνουμε τα μέλη της (1) στο τετράγωνο: $z_1^2\overline{z}_2^2+z_2^2\overline{z}_1^2+2|z_1|^2|z_2|^2=4|z_1|^2|z_2|^2$

$$z_1^2\overline{z}_2^2+z_2^2\overline{z}_1^2-2z_1^2\overline{z}_2^2z_2^2\overline{z}_2^2=0\Leftrightarrow(z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1)^2=0\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1=0\Leftrightarrow$$

$\frac{z_1}{z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}\in R$. Έστω τώρα $\frac{z_1}{z_2}=\kappa\in R\Leftrightarrow z_1=\kappa z_2$ ή $\overline{z}_1=\kappa\overline{z}_2$.

Η (1) γίνεται $\kappa z_2\cdot\overline{z}_2+z_2\kappa\overline{z}_2=2|z_1||z_2|\Leftrightarrow\kappa|z_2|^2+\kappa|z_1|^2=2|z_1||z_2|\Leftrightarrow$

$\kappa\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=2|z_1z_2|\Leftrightarrow\kappa=\frac{2|z_1z_2|}{|z_1|^2+|z_2|^2}$. Άρα $\kappa>0$.

Άσκηση 10

α. Αν $z \in C - \{i\}$ **να δείξετε ότι** $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) < 0$

β. Αν $z_1, z_2, ..., z_\nu \in C - \{i\}$ **και ισχύει η σχέση** $\left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right| + \left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right| + ... + \left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right| < 1$

να δείξετε ότι $\left|\frac{(z_1+z_2+...+z_\nu)+i}{(z_1+z_2+...++z_\nu)-i}\right| < 1$.

Λύση

α. $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| < |z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2 < |z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i) < (z-i)(\overline{z}+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 < z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 \Leftrightarrow 0 < 2iz - 2i\overline{z} \Leftrightarrow 0 < 2i(z-\overline{z})$

$\Leftrightarrow 0 < 2i[2\,\mathrm{Im}(z)]i \Leftrightarrow 0 < -4\,\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) < 0$

β. Αφού $\left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right| + \left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right| + ... + \left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right| < 1$ συνεπάγεται ότι

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z_1 < 0 \\ \left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z_2 < 0 \\ \left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z_\nu < 0 \end{array}\right\} \text{Άρα } \mathrm{Im}(z_1) + ... + \mathrm{Im}(z_\nu) < 0 \Leftrightarrow$$

$\mathrm{Im}(z_1 + ... + z_\nu) < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{(z_1+...+z_\nu)+i}{(z_1+...+z_\nu)-i}\right| < 1$ (λόγω του **α.** ερωτήματος)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν τους μιγαδικούς αριθμούς z, z_1 και z_2.

i. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, **ii.** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, **iii.** $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z}}$, **iv.** $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = z_2$

v. Αν $|z| = k$ και $k \neq 0$ τότε $\overline{z} = \frac{k^2}{z}$, **vi.** Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ τότε: **α.** $z_1 = z_2 = 0$ **β.** $|z_1| = |z_2|$,

vii. Αν $z = \text{συν}\frac{\pi}{8} + i + \frac{\pi}{8}$ τότε $z = \frac{1}{z}$

(**Απ.: v.** Σ, **vi. α.** Λ **β.** Σ, **vii.** Σ)

2. Αν $|z| = 2$, $z \in C$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών $\omega = z + 3$.

α. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (2,0) και ακτίνα 3

β. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (3,0) και ακτίνα 2.

γ. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (3,0) και ακτίνα 3.

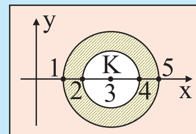
δ. βρίσκονται σε ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$.

3. Οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση $|z-10| = |z+10|$ βρίσκονται πάνω στη ευθεία.

α. $x = 0$ **β.** $y = x$ **γ.** $y = 0$ **δ.** $y = -x$

(**Απ.:** Σωστή απάντηση α)

4. Οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή (δακτύλιος ομόκεντρων κύκλων κέντρου K) ικανοποιούν τις σχέσεις



α. $|z-3| < 2$ και $|z-3| < 1$ **β.** $|z-3| > 2$ και $|z-3| < 1$

γ. $|z-3| < 2$ και $|z-3| > 1$ **δ.** $|z-2| > 3$ και $|z-1| < 3$

(**Απ.:** Σωστή απάντηση γ)

5. Να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Α. $\left|\dfrac{x+i}{-x+i}\right| + \left|\dfrac{x-i}{-x-i}\right|$, $x \in R$ — **1.** 2

β. $\left|\dfrac{\left(\dfrac{2+2i}{i}\right)^{\nu}}{1+i}\right|$ — **2.** $\dfrac{3}{5}$

Γ. $\left|\dfrac{(\bar{z})^6}{-z^2 \cdot (\bar{z})^4}\right|$ — **3.** $\dfrac{5}{3}$

Δ. $\dfrac{5 \cdot z \cdot \bar{z}}{3|z|^2}$ — **4.** 1

5. 2^{ν}

(**Απ.:** Α → 1, Β → 5, Γ → 4, Δ → 3)

6. Έστω $z = x + yi$, $z \in C$ με $|z = 2|$. Αν $w = 2z - 2$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w.

(**Απ.:** Η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο K(–2, 0) και ακτίνα 4)

7. Αν $z \in C$, $z \neq 1$ και $\left|\dfrac{z-4}{z-1}\right| = 2$ να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο.

(**Απ.:** Η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο K(0, 0) και ακτίνα 2)

8. Αν M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 που είναι λύσεις της εξίσωσης $|z|^2 - 5z + 6 = 0$, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα M_1 και M_2 και έχει το

κέντρο του στην ευθεία με εξίσωση $-3x-5y+15=0$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}\right)$

9. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+1-i|=2$ να βρείτε:

i. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Τους μιγαδικούς αριθμούς του γεωμετρικού τόπου με το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο.

(**Απ.: i.** κύκλος $k(-1,1)$, $\rho=2$, **ii.** $z_1=\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)i$ $\quad z_2=\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)i$)

10. Αν $|z_1|=|z_2|=1$ με $z_1,z_2\in C$ αποδείξτε ότι ο $\omega=\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$ (με $z_1\cdot z_2\neq -1$) ανήκει στο R.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $\overline{\omega}=\omega$. Αποδείξτε και χρησιμοποιείστε ότι $\overline{z_k}=\frac{1}{z_k}$)

11. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3. Αν $z_1=\frac{\lambda z_2+\mu z_3}{\lambda+\mu}$ (1), $\lambda,\mu\in R$ και $\lambda\mu>0$ να αποδείξετε ότι $|z_2-z_1|+|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

(**Υπ.:** Να αντικαταστήσετε στο πρώτο μέλος την (1). Θα βρείτε $\frac{|z_2-z_3|\left(|\lambda|+|\mu|\right)}{|\lambda+\mu|}$.
Προσέξτε ότι λ,μ ομόσημοι.)

12. Αν $z\in C$ και ισχύει $\left|\sqrt{2}z-3\sqrt{2}\right|=|z-5|$ να αποδείξετε ότι $|z-1|=2\sqrt{2}$.

(**Υπ.:**Υψώστε τη δοθείσα σχέση στο τετράγωνο και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα. $|w|^2=w\cdot\overline{w}$.)

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1-\lambda i)^\nu=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) με $\lambda\in R$ και $\nu\in N^*$ δεν έχει λύση.

(**Υπ.:** Θεωρήστε ότι υπάρχει $\lambda\in R$ ώστε να ισχύει η (1).
Από την ισότητα των μέτρων της (1) καταλήξτε σε άτοπο.)

14. Αν $\omega=1+(1-i)+(1-i)^2+...+(1-i)^\nu$, $\nu\in N^*$ να δείξετε ότι $2^{\frac{\nu+1}{2}}-1\leq|\omega|\leq 2^{\frac{\nu+1}{2}}+1$

(**Υπ.:** Προσέξτε ότι ο ω είναι το άθροισμα $\nu+1$ πρώτων όρων γεωμ. προόδου.)

15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την ισότητα $|z-20|=24+|z+20|$

(**Απ.:** Κλάδος της υπερβολής $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1$ με $x<0$)

16. Αν $z\in C$ και $z^2+z=-1$ να δείξετε ότι $|z+1|=|z|=1$

(**Υπ.:** $|z+1|=\left|-z^2\right|=|z|^2=1$)

17. Αν $|z-2i|=1$ και $|z-i|\leq 1$ να δείξετε ότι $1\leq|z|\leq\sqrt{3}$

(**Απ.:** Ο μιγαδικός με μικρότερο μέτρο είναι ο $z_3=i$ του οποίου η εικόνα είναι σημείο Γ(0,1)
σημείο τομής του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ με τον άξονα y΄y)

18. Να δείξετε ότι ισχύει $|z_1 - z_2|^2 \le (1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)$ για κάθε $z_1, z_2 \in R$

(**Απ.:** $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$)

19. i. Να δείξετε ότι $z + w - z\cdot w = -1 \Leftrightarrow z + w + z\cdot w = 1$ όπου z, w μιγαδικοί με $|z| = |w| = 1$

ii. Αν θέσουμε $z_1 = z + w + kzw + 1$ να δείξετε ότι: **α.** $z_1 = zw\overline{z}_2$ **β.** $|z_1| = |z_2|$

(**Απ.: i.** $|z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$ **ii. α.** $\overline{w + z + kzw} = ...$ **β.** $|\overline{z}_1| = |zw\overline{z}_2| = ...$

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. **Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$ και M_1, M_2, M_3, M_4 οι εικόνες τους αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο.**

α. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 // M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in R$.

β. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in I$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι συνευθειακά όταν $I_M\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = 0$.

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία οι εικόνες των $1, z, 1 + z^2$ είναι συνευθειακά σημεία.

Β. Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τέσσερα σημεία A, B, C, D τα οποία είναι εικόνες των αριθμών 1, i, -1, -i αντιστοίχως. Έστω M το σημείο που είναι εικόνα κάποιου μιγαδικού z.

α. Να εκφράσετε συναρτήσει του z τον πραγματικό αριθμό: $p = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD$.

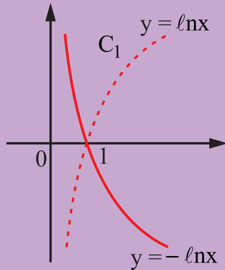
β. Υποθέτουμε ότι $\rho^{i\theta} =$ συνθ + iημθ με $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Να βρείτε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι: $p = 1$.

γ. Αναζητήστε τους αριθμούς που έχουν εικόνες τα σημεία M του πραγματικού άξονα που είναι λύσεις της εξίσωσης $p = 1$. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν εικόνες σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που είναι ταυτόχρονα λύσεις της εξίσωσεις $p = 1$.

Β΄ Μέρος (Ανάλυση)
1ο Κεφάλαιο

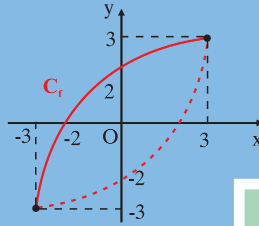
3ο μάθημα

Συναρτήσεις



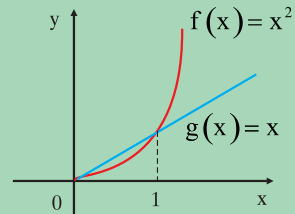
4ο μάθημα

Μονοτονία - Ακρότατα
“1 – 1”
Αντίστροφη Συνάρτηση



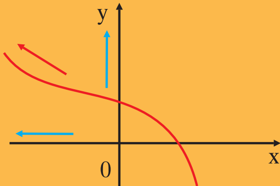
5ο μάθημα

Όριο συνάρτησης



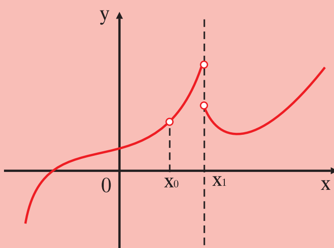
6ο μάθημα

Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$



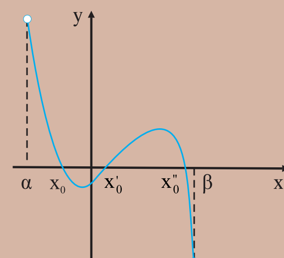
7ο μάθημα

Συνέχεια συνάρτησης



8ο μάθημα

Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα





Συναρτήσεις

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία **κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σ' ένα μόνο πραγματικό αριθμό y**. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x), γράφουμε $y = f(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Στη σχέση $y = f(x)$ το γράμμα x λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή, ενώ το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται **εξαρτημένη** μεταβλητή.

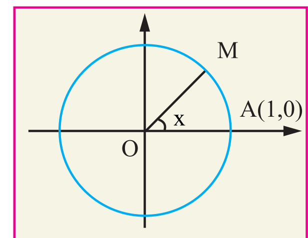
2. Στην αρχή είναι σημαντικό να εκφράζουμε λεκτικά τον κανόνα (τη συνάρτηση).

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

• Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό εκτός από το 0 στον αντίστροφό του είναι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$.

• Ο κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε άρρητο αριθμό το 0 και σε κάθε ρητό το 1 είναι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

• Ο κανόνας που αντιστοιχεί κάθε αριθμό $x \in [0, 2\pi]$ στην τετμημένη του πέρατος του τόξου $\overset{\frown}{AM}$ όπως φαίνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$.



3. Επίσης είναι σημαντικό να χαρακτηρίζουμε τις μεταβλητές.

• Έτσι στην συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x - x$ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x και η τιμή της f στο π είναι $f(\pi) = \text{ημ}\pi - \pi = -\pi$.

• Στην συνάρτηση $g(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το h ενώ το γράμμα x

είναι μια σταθερά. Κι έτσι $g(2)=\dfrac{(x+2)^2-x^2}{2}=\dfrac{4x+4}{2}=2x+2$

4. Μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη δεν είναι πάντα συνάρτηση.
Έτσι από τις παρακάτω σχέσεις
(1) $x^2+y^2=4$, (2) $x^2+3y=1$, (3) $x^2-y^2=1$ μόνον η (2) είναι συνάρτηση $y=\dfrac{1-x^2}{3}=f(x)$. Η (3) για παράδειγμα δεν είναι αφού για $x=2$ έχουμε $y=\sqrt{3}$ ή $y=-\sqrt{3}$.

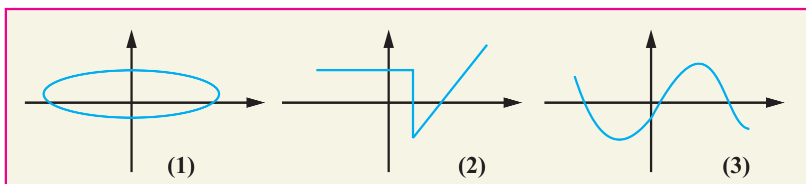
Το πεδίο ορισμού "A_f"

Αν η συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της, πεδίο ορισμού της θα θεωρείται συμβατικά το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους η τιμή f(x) να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Συμβολικά γράφουμε $A_f=\{x\in R: y=f(x)\in R\}$

Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση της f (C_f) με πεδίο ορισμού το A είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που αντιστοιχούν στα ζεύγη (x, f(x)), $x\in A$.

Από τι γραμμές των σχημάτων μόνο η (3) αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση συνάρτησης.



Συμμετρίες και παράλληλες μετατοπίσεις

1. g(x) = - f(x). Είναι συμμετρική της C_f ως προς x΄x.

2. $g(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x), x: f(x)\geq 0 \\ -f(x), x: f(x)<0 \end{cases}$

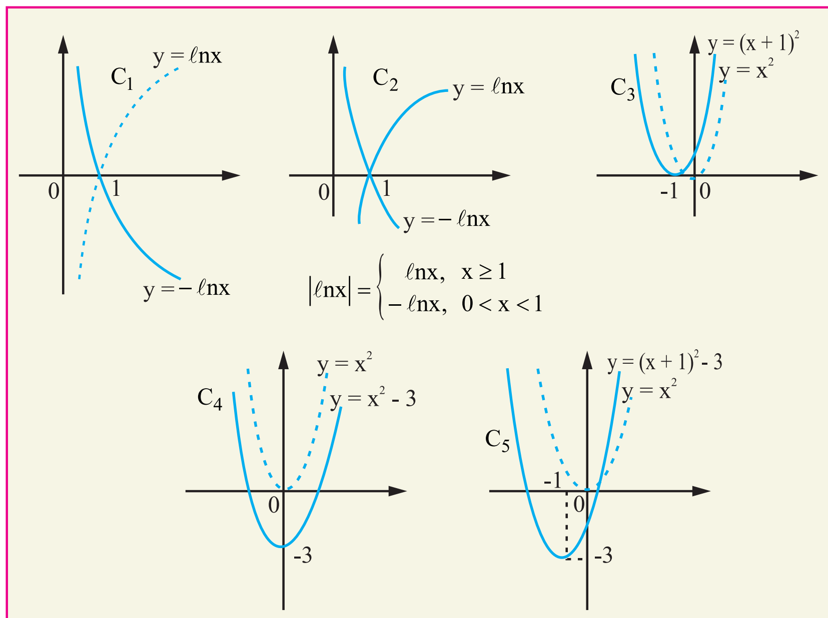
Άρα η $C_{|f|}$ είναι κοινή με την C_f πάνω από τον άξονα x΄x και συμμετρική της C_f ως προς τον x΄x για τα σημεία που είναι κάτω απ' αυτόν.

3. $g(x)=f(x)+K$. προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά K μονάδες. προς τα πάνω αν $K>0$ και $|K|$ μονάδες προς τα κάτω αν $K<0$.

4. $g(x)=f(x-x_0)$, $x_0>0$, προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες δεξιά και $g(x)=f(x+x_0)$, $x_0>0$ προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες αριστερά.

5. $g(x)=f(x-x_o)+K$. Εδώ έχουμε συνδυασμό, οριζόντια μετατόπιση κατά x_o και κατακόρυφη μετατόπιση κατά K μονάδες.

Παραδείγματα που αντιστοιχούν στα προηγούμενα



Σύνολο τιμών "f (A)"

Σύνολο τιμών "f (A)" είναι το σύνολο που στοιχεία του είναι οι τιμές της f για κάθε $x \in A$.

Δηλαδή $f(A) = \{y \in R \,/\, y = f(x)$ για ένα τουλάχιστον $x \in A\}$

Διαβάζουμε το σύνολο τιμών περιλαμβάνει εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς y για τους οποίους υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ίσες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες όταν ισχύουν:

i. έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A

ii. για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = g(x)$

Σχόλιο

Μπορούμε να αναφερόμαστε σε ισότητα συναρτήσεων ακόμα και όταν είναι ίσες μόνο σ' ένα υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους (αρκεί να διευκρινίζεται).

Πράξεις με συναρτήσεις

Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα.

Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις (με τη προϋπόθεση ότι $A \cap B \neq \phi$)

1. Πρόσθεση $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$

2. Αφαίρεση $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$

3. Πολλαπλασιασμός $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$

4. Διαίρεση $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $x\in A\cap B$ και $g(x)\neq 0$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έχουμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2}$.

Η αντιστοίχιση του x γίνεται σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη ο x απεικονίζεται στο x^2

Στη δεύτερη ο x^2 (που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 0) απεικονίζεται στην τετραγωνική του ρίζα.

Έχουμε $x\xrightarrow[(\ )^2]{h(x)=x^2}x^2\xrightarrow[\sqrt{\ }]{g(x)=\sqrt{x}}\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in R$. Για την $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$. Είναι

$$x\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x}\xrightarrow{(\ )^2}\left(\sqrt{x}\right)^2=x \text{ αφού } x\geq 0$$

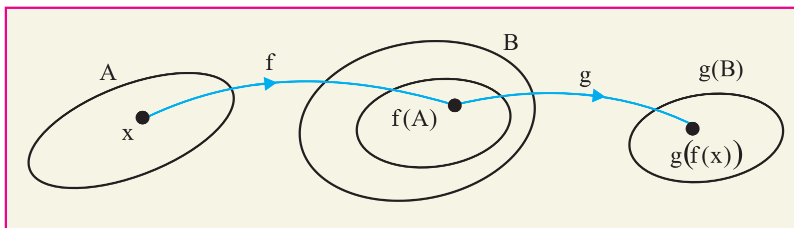
Ορίζουμε σαν σύνθεση της f με τη g που έχουν πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα την συνάρτηση $g(f(x))$ εφόσον τα πεδία ορισμού τους το επιτρέπουν. Συμβολίζουμε $(gof)(x)=g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της gof "A_{gof}"

Ας προσέξουμε τη διαδικασία απεικόνισης κάποιου x

$$x\xrightarrow[1\eta\varphi\alpha\sigma\eta]{f}y=f(x)\xrightarrow[2\eta\varphi\alpha\sigma\eta]{g}g(y)=g(f(x))$$

Είναι φανερό από τον τρόπο που ορίζουμε την σύνθεση το πεδίο ορισμού της αρχικά θα είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που ξεκινά πρώτη τη διαδικασία απεικόνισης. Δηλαδή $A_{gof}\subseteq A_f$. Για να συνεχιστεί η απεικόνιση θα πρέπει η τιμή f(x) ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $f(x)\in A_g$. Αν για κάποιο x_o, η τιμή $f(x_o)\notin A_g$ τότε το x_o αποκλείεται από το πεδίο ορισμού της σύνθεσης. Μετά απ' αυτά είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης ορίζεται ως το σύνολο $A_{gof}=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}$ με την προϋπόθεση φυσικά ότι αυτό το σύνολο είναι διάφορο του κενού.



Παρατήρηση: Για δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R αποδυκνείεται ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσής του είναι το R.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης απαιτούμε:

1. Οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός

2. Οι υπόριζες παραστάσεις μη αρνητικές δηλαδή αν $y = \sqrt[\nu]{f(x)}$ πρέπει $f(x) \geq 0$.

3. Για την $f(x) = \ell n(g(x))$ απαιτούμε $g(x) > 0$.

4. Για την $f(x) = \varepsilon\varphi(\varphi(x))$ απαιτούμε $\varphi(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

5. Για την $f(x) = \sigma\varphi(h(x))$ απαιτούμε $h(x) \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x} - \ell n(5-x)$ **.**

Λύση

Είναι $A_f = \{x \in R : f(x) \in R\}$. Πρέπει $x - 1 \geq 0$, $x \geq 0$ και $5 - x > 0$ οπότε $A_f = [1,5)$.

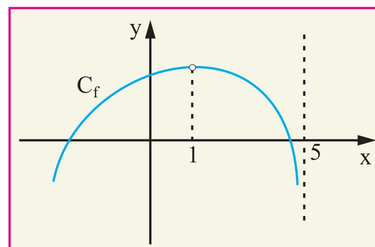
Παρατηρήσεις

- Κάποιες φορές το ενδιαφέρον μας για μια συνάρτηση περιορίζεται μόνο σ' ένα υποσύνολο Γ του πεδίου ορισμού της.
- Για συναρτήσεις πολλαπλού τύπου πεδίο ορισμού είναι η ένωση όλων των διαστημάτων που αφορούν τον κάθε τύπο της f.

Έτσι για την $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \alpha\nu\ x \in A_1 \\ f_2(x) & \alpha\nu\ x \in A_2 \\ f_3(x) & \alpha\nu\ x \in A_3 \end{cases}$

Είναι $A_f = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Θυμίζουμε ότι για να είναι καλά ορισμένη η f πρέπει $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ και $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ και $A_1 \cap A_3 = \emptyset$.

- Το πεδίο ορισμού από την C_f προκύπτει ως το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον x΄x. Στην γραφική παράσταση που βλέπουμε είναι: $A_f = (-\infty,1) \cup (1,5)$



Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση του συνόλου τιμών από τον ορισμό

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ (1)

Το σύνολο τιμών είναι οι τιμές της παραμέτρου y ώστε η (1) να έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x μέσα στο A.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $x \in R$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Είναι $A_f = R$. Παίρνουμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma - y = 0$ (1) η οποία για να έχει λύση ως προς $x \in R$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{-(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha}$, αφού $\alpha > 0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[-\dfrac{\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$, με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Παρατηρήσεις

- Αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για την εύρεση του συνόλου τιμών και ούτε πλήρης. Σ'επόμενα μαθήματα θα προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών με χρήση της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης.
- Το σύνολο τιμών με την βοήθεια της C_f εμφανίζεται σαν το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον άξονα y΄y.

Κατηγορία – Μέθοδος 3
Γνωρίζουμε τις f, g και ζητάμε την fog

Παράδειγμα 3

Δίνεται η $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ και $g(x) = 2\eta\mu x - 1$.

i. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της fog είναι το R.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της fog.

Λύση

i. Ορισμός της σύνθεσης

$A_f = \{x \in R : -x^2 - 2x + 3 \geq 0\}$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι $x \in [-3, 1]$ και $A_f = [-3, 1]$.

Είναι $A_g = R$.

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $A_{fog} = \{x \in R : -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1\}$

Έχουμε $-3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow x \in R$. Άρα $A_{fog} = R$.

ii. $(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3 - 2g(x) - g^2(x)} = \sqrt{3 - 2(2\eta\mu x - 1) - (2\eta\mu x - 1)^2} =$

$= \sqrt{4 - 4\eta\mu^2 x} = 2\sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = 2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2|\sigma\upsilon\nu x|$, $x \in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 4
Όταν γνωρίζουμε τις fog και g και αναζητούμε την f θέτουμε $g(x)=\omega$ και λύνουμε ως προς x.

Παράδειγμα 4

Έστω $(fog)(x)=x^3-6x^2+12x+15$, $x\in R$ **και** $g(x)=x-2$. **Να βρεθεί η f.**

Λύση

Θέτουμε $g(x)=x-2=\omega \Leftrightarrow x=\omega+2$ (1). Επειδή $x\in R$ και $(x-2)\in R$ οπότε $\omega\in R$.

Άρα $(fog)(x)=f(g(x))=x^3-6x^2+12x+15$ γίνεται

$f(\omega)=(\omega+2)^3-6(\omega+2)^2+12(\omega+2)+15$ ή

$f(\omega)=\omega^3+23$, $\omega\in R$, Επομένως $f(x)=x^3+23$, $x\in R$.

Παράδειγμα 5

Έστω $f(\ell n2x)=x+3$, $x>0$. **Να βρεθεί η f.**

Λύση

Θέτουμε $\left.\begin{matrix}\ell n2x=\omega\\ x>0,\ \omega\in R\end{matrix}\right\}$ $2x=e^{\omega}\Leftrightarrow x=\frac{e^{\omega}}{2}$ (1). Άρα από $f(\ell n2x)=x+3$, έχουμε:

$f(\omega)\overset{(1)}{=}\frac{e^{\omega}}{2}+3$ και γράφουμε $f(x)=\frac{e^x}{2}+3$, $x\in R$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5
Όταν γνωρίζουμε τις fog, f και αναζητούμε την g
(1) Η f(g(x)) με μεταβλητή το x.
(2) Η f(g(x)) από τον τύπο της f με μεταβλητή g(x).
Εξισώνουμε τις (1), (2) λύνουμε ως προς g(x).

Παράδειγμα 6

Έστω $f(g(x))=x^4-3x^2+x-2$, $x\in R$ **και** $f(x)=4x-5$. **Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το R να βρεθεί ο τύπος της.**

Λύση

Είναι $f(g(x))=x^4-3x^2+x-2$ (1) και $f(g(x))=4g(x)-5$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε: $4g(x)-5=x^4-3x^2+x-2 \Leftrightarrow g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$, $x\in R$.

Παράδειγμα 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=x^2$, $s(x)=e^x$, $p(x)=\eta\mu x$. **Εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιώντας μόνο σαν πράξη τη σύνθεση.**

i. $f(x)=e^{\eta\mu x}$ **ii.** $f(x)=\eta\mu e^x$ **iii.** $f(x)=\eta\mu x^2$

iv. $f(x)=\eta\mu^2 x$ **v.** $f(x)=\eta\mu\left(\eta\mu\left(e^{e^x}\right)\right)$ **vi.** $f(x)=e^{2\eta\mu x}$

Λύση

i. $f = s o p$ **ii.** $f = p o s$ **iii.** $f = p o g$

iv. $f = g o p$ **v.** $f = p o p o s o s$ **vi.** $f = g o s o p$

Όλες οι συναρτήσεις f, s, p και οποιεσδήποτε συνθέσεις μεταξύ τους έχουν πεδίο ορισμού το R.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Μέθοδος σύνθεσης συναρτήσεων πολλαπλού τύπου:

Εχουμε $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in B_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 \end{cases}$

Για την συνάρτηση της fog ορίζουμε όπου επιτρέπουν τα πεδία ορισμού διαδοχικά τις συναρτήσεις $f_1 o g_1$, $f_1 o g_2$, $f_2 o g_1$, $f_2 o g_2$.

Παράδειγμα 8

Έστω $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 3) \\ 5 - x^2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$ **και** $g(x) = \begin{cases} 2x+5, x \in (-\infty, 2] \\ 7 - x, x \in (2, +\infty) \end{cases}$. **Να βρεθεί η fog.**

Λύση

Είναι $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+1, x \in (-\infty, 3) \\ f_2(x) = 5 - x^2, x \in [3, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x+5, x \in (-\infty, 2] \\ g_2(x) = 7 - x, x \in (2, +\infty) \end{cases}$

• $\mathbf{f_1 o g_1}$

$A_{f_1 o g_1} = \{x \in A_{g_1} = (-\infty, 2] \,/\, g_1(x) = 2x + 5 \in A_{f_1}\} =$

$\{x \leq 2 \text{ και } 2x + 5 < 3\} = \{x \leq 2 \text{ και } x < -1\} = (-\infty, -1)$

Άρα $f_1(g_1(x)) = g_1(x) + 1 = 2x + 5 + 1 = 2x + 6, x < -1$

• $\mathbf{f_1 o g_2}$

$A_{f_1 o g_2} = \{x \in A_{g_2} \,/\, g_2(x) \in A_{f_1}\} = \{x \in (2, +\infty) / g_2(x) = 7 - x < 3\} =$

$\{x > 2 \text{ και } x > 4\} = (4, +\infty)$. Άρα $f_1(g_2(x)) = 7 - x + 1 = 8 - x$ με $x > 4$

• $\mathbf{f_2 o g_1}$

$A_{f_2 o g_1} = \{x \leq 2 \text{ και } 2x + 5 \geq 3\} = \{x \leq 2 \text{ και } x \geq -1\} = [-1, 2]$

Άρα $f_2(g_1(x)) = 5 - g_1^2(x) = 5 - (2x+5)^2$, $x \in [-1, 2]$

• $\mathbf{f_2 o g_2}$

$A_{f_2 o g_2} = \{x > 2 \text{ και } 7 - x \geq 3\} = (2, 4]$. Άρα $f_2(g_2(x)) = 5 - g_2^2(x) = 5 - (7-x)^2$, $x \in (2, 4]$

Άρα είναι $f(g(x)) = \begin{cases} 2x+6, & x<-1 \\ 5-(2x+5)^2, & -1\le x\le 2 \\ 5-(7-x)^2, & 2<x\le 4 \\ 8-x, & x>4 \end{cases}$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ell n\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Λύση

Πρέπει $x \ge 0$ και $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x<1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [0,1)$.

Το σύνολο τιμών $f(A) = \{y \in R \,/\, y = f(x) \text{ με } x \in A\}$

Έχουμε $y = \ell n\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(e^y+1\right) = 1-e^y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1-e^y}{e^y+1}$

Επειδή $x \in [0,1)$ και $0 \le \sqrt{x} < 1$ άρα $0 \le \dfrac{1-e^y}{e^y+1} < 1$

Λύνουμε τις ανισώσεις $\dfrac{1-e^y}{e^y+1} \ge 0 \overset{e^y+1>0}{\Leftrightarrow} 1-e^y \ge 0 \Leftrightarrow e^y \le 1 \Leftrightarrow y \le 0$ (1) και

$\dfrac{1-e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow 1-e^y < e^y+1 \Leftrightarrow 2e^y > 0 \Leftrightarrow y \in R$ (2).

Από την συναλήθευση των (1), (2) έχουμε $y \le 0$ και $f(A) = (-\infty, 0]$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Λύση

Α΄ τρόπος : Πεδίο ορισμού της f είναι το R. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x+\dfrac{1}{e^x}}{2} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x} = y \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}-2e^x y+1=0 \\ y>0 \end{cases} \quad (1)$$

Θέτουμε $e^x = \omega$, $\omega>0$ και (1) γίνεται $\omega^2 - 2y\omega + 1 = 0$ (2). Για να έχει λύση η (1) ως προς x αρκεί να έχει λύση η (2) ως προς ω είναι $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 4y^2-4 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \ge 1 \Leftrightarrow y \le -1$ ή $y \ge 1$ και επειδή $y>0$ το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Β΄ τρόπος

Γνωρίζουμε ότι $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ για $x>0$ (πράγματι $x^2+1 \ge 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$ που ισχύει για $x>0$)

Οπότε $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\overset{e^x=\omega}{=}\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2=1$. Άρα είναι $f(x)\geq 1$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$ (1) με $x\neq 0$

Λύση

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$. Έτσι η (1) γίνεται: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα (Σ)

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \quad (3) \\ -4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x} \quad (4) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε:

$$-3f(x)=x-\frac{2}{x}\Leftrightarrow -3f(x)=\frac{x^2-2}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2-x^2}{3x},\ x\neq 0$$

Άσκηση 4

Κατασκευάστε μια συναρτησιακή εξίσωση που να έχει λύση την συνx.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $συν2x=2συν^2x-1$ οπότε η εξίσωση $f(2x)=2f^2(x)-1$ έχει σαν λύση την συνx.

Άσκηση 5

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f(x)\leq x$, $x\in R$ (1) και $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, $x,y\in R$ (2) να δείξετε ότι: α. f(0) = 0 και β. f(x) = x

Λύση

α. Από την (1) για $x=0$ είναι $f(0)\leq 0$.

Από την (2) για $x=y=0$ είναι $f(0)\leq 2f(0)\Leftrightarrow f(0)\geq 0$. Άρα τελικά $f(0)=0$ (3)

β. Έχουμε $f(x)\leq x$ (1) οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)\geq x$.

Στην (2) θέτουμε όπου y το -x και έχουμε $f(0)\leq f(x)+f(-x)$

$\Leftrightarrow 0\leq f(x)+f(-x)\Leftrightarrow -f(-x)\leq f(x)$ (4)

Στην (1) θέτουμε όπου x το - x και έχουμε $f(-x)\leq -x\Leftrightarrow -f(-x)\geq x$ (5)

Από τις (4), (5) έχουμε $f(x)\geq x$ (6). Από τις (1), (6) προκύπτει τελικά ότι $f(x)=x$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους:

α. $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ και $g(x)=x+3$, **β.** $f(x)=\ell n(x^2-9)$ και $g(x)=\ell n(x-3)+\ell n(x+3)$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του R, στο οποίο είναι ίσες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\frac{1}{x^2-25}$ και $g(x)=\frac{x+5}{x-5}$ αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $\frac{f}{g}$ και να λύσετε την ανίσωση $(f+g)(x)\le\frac{26}{x^2-25}$.

3. Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\ell n\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ και $g(x)=-\ell n\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ είναι ίσες. Είναι η συνάρτηση f περιττή ;(**Απ.:** Είναι $A_f=A_g=R$. Θεωρείστε τη διαφορά $f(x)-g(x)$, για κάθε $x\in R$.Οι συναρτήσεις είναι ίσες)

4. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

• Οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ είναι ίσες.

• Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι άρτια.

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ell nx^4$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

5. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\sqrt{|x|-2x}$ **ii.** $f(x)=\frac{2x+1}{|x|+x}$ **iii.** $f(x)=\ell n\left(\frac{1-|x|}{|x|-2}\right)$ **iv.** $f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x^3+x-10}}$

(**Απ.: i.** $D_f=(-\infty,0]$ **ii.** $D_f=(0,+\infty)$ **iii.** $D_f=(-2,-1)\cup(1,2)$ **iv.** $D_f=(2,+\infty)$)

6. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i. $f(x)=|\eta\mu x|$ **ii.** $f(x)=\eta\mu|x|$ **iii.** $f(x)=2x+\frac{|x-1|}{x-1}$ **iv.** $f(x)=|x|\cdot x^2$

7. Ένα κουτί από χρυσάφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τετραγωνική βάση πλευράς x και όγκο $324cm^3$. Το υλικό τις βάσεις κοστίζει $2€/cm^2$ ενώ των άλλων εδρών $1€/cm^2$. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος κατασκευής του κουτιού συναρτήσει του x.

(**Απ.:** $f(x)=3x^2+\frac{1296}{x}$, $x>0$)

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x)=\ell n(x+1)$ και $g(x)=\sqrt{4-|x|}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $\frac{f}{g}$, fog.

9. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f, αν:

α. $f(x)=2x+3$ και $g(x)=\eta\mu x$

β. $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x}$

γ. $f(x)=|x|$ και $g(x)=\sqrt{x}$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \alpha\nu\ x<2 \\ x+1, & \alpha\nu\ x\ge 2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x^2-x, & \alpha\nu\ x<3 \\ 2x, & \alpha\nu\ x\ge 3\end{cases}$.
Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

11. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το [-11,1] τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της $f(x^2-7x+1)$. (**Απ.:** $[0,3]\cup[4,7]$)

12. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[1,6]$, τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(5+2\eta\mu x)$.

13. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x-1)=x^2-7x+12$, $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $xf(x)+f(-x)=x$ για $x\in R$.

(**Απ.:** Βλέπε την λυμένη άσκηση 3. Θέτουμε όπου x το -x. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in R$)

15. Αν $f(x+\lambda)\le x\le f(x)+\lambda$ για κάθε $x\in R$ και λ σταθερό αριθμό να δείξετε ότι $f(x)=x-\lambda$.

(**Υπ.:** Αξιοποιώντας την υπόθεση, να αποδείξετε ότι $f(x)\ge x-\lambda$)

16. **α.** Να δείξετε ότι $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ για τα $x>0$.

β. Έστω $f(x)=\left(9+\sqrt{80}\right)^x+\left(9-\sqrt{80}\right)^x$. **i.** Να δείξετε ότι η f είναι άρτια,

ii. Να δείξετε ότι $f(x)\ge 2$. (**Απ.:** **β.ii.** Είναι $\left(9-\sqrt{80}\right)^x=\dfrac{1}{\left(9+\sqrt{80}\right)^x}$ και αξιοποιείστε το α)

17. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f(x)=|\ell n|x||$ να υπολογίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=10^{-6}$. (**Απ.:** Τέσσερεις)

18. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)+f(x)+1=0$ για κάθε $x\in R$. (**Απ.:** Είναι $\Delta<0$ άρα δεν έχει λύση η εξίσωση)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού Α, τέτοιες ώστε $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in A$.

i. Αν ισχύει $\dfrac{f^4(x)}{\alpha}+\dfrac{g^4(x)}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ με $\alpha,\beta\in R^*$, $\alpha+\beta\neq 0$ να δείξετε ότι $\dfrac{f^8(x)}{\alpha^3}+\dfrac{g^8(x)}{\beta^3}=\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^3}$. ii. Να αποδείξετε ότι $|\alpha f(x)+\beta g(x)|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.



Μονοτονία - Ακρότατα - "1 – 1" Αντίστροφη Συνάρτηση

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται:

Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Οι γνησίως αύξουσες και οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις γενικά λέγονται **γνησίως μονότονες.**

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα) και δεν αναφέρεται το διάστημα, θα εννοούμε ότι είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Αποδεικνύεται ότι η μονοτονία των συναρτήσεων ακολουθεί κάποιους κανόνες όσον αφορά τις πράξεις και τη σύνθεση μεταξύ των συναρτήσεων.

Έτσι, για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σ'ένα διάστημα Δ και f(x), g(x) > 0 για κάθε $x \in \Delta$ τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ακρότατα συνάρτησης

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει:

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα.** Είναι φανερό ότι μία συνάρτηση μπορεί να μην έχει ακρότατα.

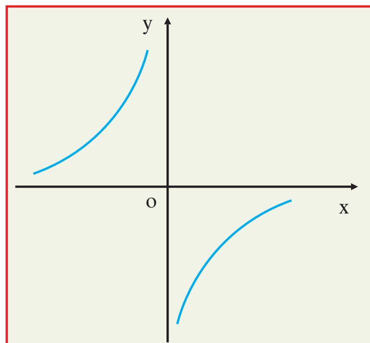
Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα, τα άκρα του είναι τα ακρότατα της συνάρτησης

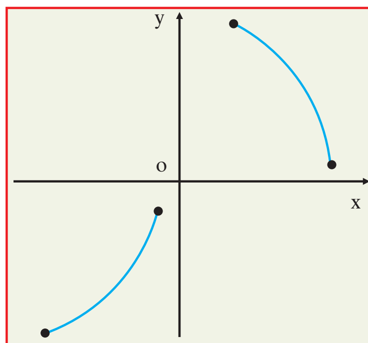
Συνάρτηση 1–1

Μια συνάρτηση λέγεται **1–1 (ένα προς ένα)** στο πεδίο ορισμού της αν όταν και μόνον όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 \neq x_2$ έπεται $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Συνέπεια του ορισμού είναι η πρόταση:
Μια συνάρτηση είναι **1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει: $x_1 = x_2$

Αν μια συνάρτηση είναι 1–1, τότε σε κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο x του πεδίου ορισμού της. Γραφικά αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x'x, δηλαδή της μορφής y = α, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ συμπεραίνουμε ότι είναι και 1-1 στο Δ (επειδή λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς μια φορά) .





Το αντίστροφο δεν ισχύει , για παράδειγμα οι παραπάνω συναρτήσεις είναι 1 - 1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τις γραφικές τους παραστάσεις το πολύ σε ένα σημείο και όμως δεν είναι γνησίως μονότονες.

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών f(A) η οποία είναι 1-1 στο A.
Ορίζεται τότε η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού f(A) και σύνολο τιμών A και ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Η f^{-1} λέγεται **αντίστροφη** συνάρτηση της f.

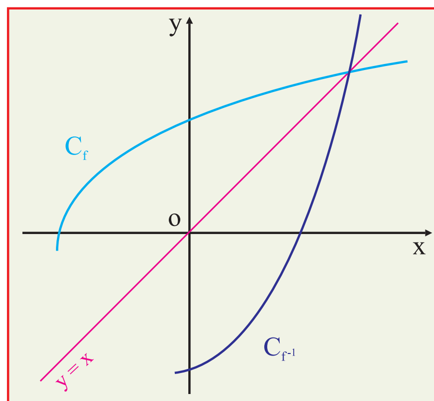
Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίζεται η αντίστροφη μιας συνάρτησης f, έχουμε ότι:

i. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, και
ii. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.
iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας.

Η σύνθεση δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Έτσι, αν f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση,με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών f(A) ισχύουν :

$f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$ $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in f(A)$

Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y=x$.



Αποτέλεσμα αυτού, είναι ότι οι εξισώσεις : $f(x)=f^{-1}(x), f(x)=x$ ή $(f^{-1}(x)=x)$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $A\cap f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού της f μόνο όταν η f (ή f^{-1}) είναι γνησίως αύξουσα. (Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις, άσκηση 9)

Αν γνωρίζουμε δε, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

Σχόλιο: Μια συνάρτηση μπορεί να μην αντιστρέ-φεται στο πεδίο ορισμού της άλλά σε ένα υποσύνολο του π.χ. $f(x)=x^2$ δεν αντιστρέφεται στο R (όχι 1 – 1) όμως αντιστρέφεται στο $(-\infty,0)$ και στα διαστήματα $(0,+\infty)$ και $(1-1)$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη εργαζόμαστε ως εξής :

Θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1<x_2$ και προσπαθούμε να "δημιουργήσουμε" μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Αν καταλήξουμε σε $f(x_1)<f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ενώ αν αν καταλήξουμε σε $f(x_1)>f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους : $f(x)=2x^3+1$ και $g(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{3}$

Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$.

Τότε $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3+1<2x_2^3+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Το πεδίο ορισμού της g είναι τα $x\in R$ για τα οποία ισχύει $4-x\geq 0$

Είναι $4-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$ οπότε $A_g=(-\infty,4]$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Έστω μια συνάρτηση f με $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα Δ.

Βρίσκουμε το πρόσημο του λόγου $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ με $x_1, x_2 \in \Delta$ και $x_1 \neq x_2$

Αν $\lambda > 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
Αν $\lambda < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
Αν $\lambda = 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Πρέπει $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$) .

Είναι : $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\dfrac{3x_2}{x_2+2} - \dfrac{3x_1}{x_1+2}}{x_2 - x_1} = \dfrac{6}{(x_2+2)(x_1+2)}$

Για $x_1 < x_2 < -2$ είναι $x_1 + 2 < 0$ και $x_2 + 2 < 0$ οπότε $\lambda > 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -2)$. Αν $-2 < x_1 < x_2$ τότε $x_1 + 2 > 0$ και $x_2 + 2 > 0$ οπότε $\lambda > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της.

Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της αφού για παράδειγμα απο $-4 < 1$ παίρνουμε $f(-4) = 6 > f(1) = 1$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα μιάς συνάρτησης (αν έχει τέτοια) εργαζόμαστε ως εξής :

Προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αν για παράδειγμα $f(A) = [k, \lambda]$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης το k είναι το ελάχιστο και το λ το μέγιστο, ενώ αν $f(A) = [k, +\infty)$ ή $[k, \lambda)$ το κ είναι το ελάχιστο της συνάρτησης ενώ η συνάρτηση δεν έχει μέγιστο. Ανάλογα ισχύουν όταν $f(A) = (-\infty, \lambda]$ ή $(\kappa, \lambda]$ ή ....

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = 3 + \sqrt{1-x}$.Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f (αν υπάρχουν).

Λύση

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $A_f = (-\infty, 1]$.

Επομένως : $x \leq 1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow 3+\sqrt{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = [3, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 3$ η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή το 3 για $x = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να δείξουμε, ότι μία συνάρτηση είναι 1-1:

1. Δεχόμαστε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και δείχνουμε, ότι $x_1 = x_2$ ή δεχόμαστε ότι $x_1 \neq x_2$ και δείχνουμε, ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.
3. Δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
4. Εκμεταλλευόμαστε την γραφική παράσταση (αν είναι γνωστή).

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ είναι 1-1.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R - { - 1 }. Έχουμε:

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2x_1}{x_1+1} = \dfrac{2x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow 2x_1(x_2+1) = 2x_2(x_1+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 = 2x_1x_2 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη μια συνάρτησης f κάνουμε τα εξής βήματα:

i. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

iii. Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης. Οι περιορισμοί για το y που τυχον θα προκύψουν μας δίνουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f που είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^x - 1$. Να βρεθεί η αντίστροφή της f^{-1} (εφόσον υπάρχει).

Λύση

Είναι $A_f = R$. Εξετάζουμε αν η f είναι 1-1.

Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2e^{x_1} - 1 = 2e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$

Είναι: $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+1}{2}$ (1)

Επειδή $e^x > 0$ πρέπει $\dfrac{y+1}{2} > 0 \Leftrightarrow y > -1$. Έτσι η (1) γίνεται $x = \ln\dfrac{y+1}{2}$ με $y > -1$ και ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x+1}{2}$ με $x > -1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Επίλυση εξισώσεων

Αν η f είναι 1-1 ισχύει η ισοδυναμία $f(g(\lambda)) = f(h(\lambda)) \Leftrightarrow g(\lambda) = h(\lambda)$

Επίλυση ανισώσεων

Αν η f είναι γνησίως μονότονη ισχύει η ισοδυναμία

$$f(g(\lambda)) < f(h(\lambda)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(\lambda) < h(\lambda) \text{ αν η f είναι γνησίως αύξουσα} \\ g(\lambda) > h(\lambda) \text{ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$$

Παράδειγμα 6

Έστω $f(x) = \alpha^x - x$, με $0 < \alpha < 1$ και $x \in R$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $\alpha^{\lambda^3-\lambda} + (\lambda^2 - 1) = \alpha^{\lambda^2-1} + \lambda^3 - \lambda$.

Λύση

i. Η $f(x) = \alpha^x + (-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R διότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\left.\begin{matrix} \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \\ -x_1 > -x_2 \end{matrix}\right\}$ οπότε

$\alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ii. Η εξίσωση $\alpha^{\lambda^3-\lambda} + (\lambda^2 - 1) = \alpha^{\lambda^2-1} + \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^3-\lambda} - (\lambda^3 - \lambda) = \alpha^{\lambda^2-1} - (\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow$

$f(\lambda^3 - \lambda) = f(\lambda^2 - 1)$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R είναι και 1-1 στο R οπότε:

$\lambda^3 - \lambda = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης f^{-1} όταν γνωρίζουμε μια συναρτησιακή σχέση για την f.

Παράδειγμα 7

Δίνεται $f:R\to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)+x=0$ (1), για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

Έστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$.
Άρα η f είναι 1-1 στο R οπότε αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y$ η εξίσωση γίνεται $y^3+y+x=0\Leftrightarrow x=-y-y^3$, $y\in R$.

Άρα $f^{-1}(x)=-x-x^3$, $x\in R$.

Παράδειγμα 8

Για την $f:R\to R$ ισχύουν τα παρακάτω:

i. $f(R)=R$, **ii.** $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, $x, y\in R$ **(1)**, **iii. Η f είναι 1-1 στο R.**

Να δείξετε ότι $f^{-1}(\alpha x+\beta y)=\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)$.

Λύση

Στη σχέση (1), θέτουμε όπου x, $f^{-1}(x)$ και όπου y, $f^{-1}(y)$ οπότε έχουμε:

$$f\left(\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)\right)=\alpha f\left(f^{-1}(x)\right)+\beta f\left(f^{-1}(y)\right)=\alpha x+\beta y$$

(αφού $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ για κάθε $x,y\in R$).

Επομένως $f^{-1}\left(f\left(\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)\right)\right)=f^{-1}(\alpha x+\beta y)\Leftrightarrow \alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha x+\beta y)$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+\ln x$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Έστω $0<x_1<x_2$ (1) και επειδή η συνάρτηση lnx είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έχουμε $\ln x_1<\ln x_2$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε: $x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2$ που σημαίνει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 2

Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R αφού $e^x+1>0$, για κάθε $x\in R$.

Είναι: $\lambda = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}-\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}}{x_2-x_1} = \dfrac{2\left(e^{x_2}-e^{x_1}\right)}{x_2-x_1}$

Αν $x_1<x_2$ τότε και $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2}-e^{x_1}>0$, οπότε είναι $\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της .

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+f(x)+3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R ισχύει:

$f(x_1)<f(x_2)$ (1), για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$

Η συνάρτηση e^x είναι και αυτή γνησίως αύξουσα και επειδή είναι $f(x_1)<f(x_2)$ θα είναι και

$e^{f(x_1)}<e^{f(x_2)}$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατα μέλη και έχουμε :

$e^{f(x_1)}+f(x_1)<e^{f(x_2)}+f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)}+f(x_1)+3<e^{f(x_2)}+f(x_2)+3 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R.

Άσκηση 4

α. Να δείξετε ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της f και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος.

β. Να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$ (1)

Λύση

α. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι 1-1, που σημαίνει ότι, για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Αν η f έχει δύο σημεία μηδενισμού, έστω x_1, x_2, με $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)=0$,που είναι άτοπο. Επομένως η f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της και αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x'x το πολύ σε ένα σημείο.

β. Η εξίσωση (1) έχει προφανή λύση την $x=2$ αφού $3^2+4^2=5^2$. Έχουμε:

$3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1=0$ επειδή $5^x \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$, $x \in R$ και θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x_2}$ (1) και $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x_2}$ (2)

διότι η συνάρτηση α^x με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και σύμφωνα με το α' ερώτημα έχει το πολύ μία ρίζα.
Επειδή $g(2)=0$, το 2 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0$.

Άσκηση 5

Έστω συνάρτηση f με σύνολο τιμών το R και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ **.**
Να δείξετε ότι η g έχει μέγιστη τιμή τον αριθμό 1.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)\le 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x και ότι το 1 είναι η τιμή της συνάρτησης g.

Είναι $g(x)\le 1\Leftrightarrow \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}\le 1\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1\ge 0\Leftrightarrow (f(x)-1)^2\ge 0$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.Επειδή η συνάρτηση f έχει πεδίο τιμών το R, υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$ οπότε $g(x_0)=1$.

Άρα υπάρχει $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $g(x)\le 1=g(x_0)$ για κάθε $x\in R$. Επομένως, η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή το 1.

Άσκηση 6

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

i. $f(x)=2x+1$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **iii.** $f(x)=5x^2+1$ **iv.** $f(x)=(x+1)(x-4)+3$

Λύση

i. Είναι $A_f=R$. Είναι $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1 στο R.

ii. Είναι $A_f=R-\{1\}$.

Είναι: $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=\dfrac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow(x_1+1)(x_2-1)=(x_1-1)(x_2+1)\Leftrightarrow$

$x_1x_2-x_1+x_2-1=x_1x_2+x_1-x_2-1\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι 1-1 στο $R-\{1\}$

iii. Είναι $A_f=R$ με $f(-1)=f(1)=6$ και επειδή $-1\ne 1$, η f δεν είναι 1-1 στο R.

iv. Είναι $A_f=R$ με $f(-1)=f(4)=3$ και επειδή $-1\ne 4$, η f δεν είναι 1-1 στο R.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x)$.
Να βρεθεί η αντίστροφή της συνάρτηση , εφόσον αυτή υπάρχει.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι τα $x \in R$ για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>\ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(1,+\infty)$. Για να είναι μια συνάρτηση αντιστρέψιμη πρέπει να είναι 1-1, δηλαδή να ισχύει : αν $f(x_1)=f(x_2)$ τοτε $x_1=x_2$

Θεωρούμε: $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \ln(\ln x_1)=\ln(\ln x_2) \Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ που σημαίνει ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο R.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=\ln(\ln x)$ ως πρός x.

Είναι $y=\ln(\ln x) \Leftrightarrow e^y=\ln x \Leftrightarrow x=e^{e^y}$ και εφόσον $x>1$ έχουμε $e^{e^y}>1 \Leftrightarrow e^{e^y}>e^0 \Leftrightarrow e^y>0$, που ισχύει για κάθε y πραγματικό . Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(y)=e^{e^y}$ με $y \in R$.

Επειδή ο συμβολισμός ανεξάρτητης μεταβλητής δεν έχει σημασία και επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x , γράφουμε τον τύπο της f^{-1} με μεταβλητή το x :

οπότε $f^{-1}(x)=e^{e^x}$ με $x \in R$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις των συναρτήσεων με τύπους :

α. $f(x)=x^2+3$, $x<0$ **και** **β.** $g(x)=3x^3+1$

Λύση

α. Είναι $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2+3=x_2^2+3 \Leftrightarrow x_1^2=x_2^2 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=x^2+3$ ως πρός x.

Έχουμε $y=x^2+3$, $x<0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{y-3}$, $x<0$, $y\geq 3$

Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-3}$ με $x\geq 3$

β. Η g είναι 1-1στο R αφού:

$g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^3+1=3x_2^3+1 \Leftrightarrow 3x_1^3=3x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3=x_2^3 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η g αντιστρέφεται και για τον τύπο της αντίστροφής της έχουμε:

$$y=3x^3+1 \Leftrightarrow 3x^3=y-1 \Leftrightarrow x=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y-1}{3}}, & y\geq 1 \\ -\sqrt[3]{-\dfrac{y-1}{3}}, & y<1 \end{cases}$$

Επομένως $g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3}}, & x\ge 1\\ -\sqrt[3]{-\dfrac{x-1}{3}}, & x<1\end{cases}$

Ασκηση 9

α. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το R, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ (1) και $f(x)=x$ (2) είναι ισοδύναμες.

β. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{4x^3-1}{3}$ και στη συνέχεια τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Λύση

α. Δύο εξισώσεις λέγονται ισοδύναμες όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- Έστω ότι $x_0\in R$ είναι λύση της (1).

Τότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$, οπότε $f(f(x_0))=f\left(f^{-1}(x_0)\right)\Leftrightarrow f(f(x_0))=x_0$ (3)

• Αν $f(x_0)>x_0$ τότε $f(f(x_0))>f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0))>x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).

• Αν $f(x_0)<x_0$ τότε $f(f(x_0))<f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0))<x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα $f(x_0)=x_0$, οπότε ο x_0 είναι λύση της (2).

- Έστω ότι $x_0\in R$ είναι λύση της (2).

Τότε $f(x_0)=x_0$ (3) οπότε $f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$ (4).

Από (3) και (4) έχουμε ότι $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$ δηλαδή ο x_0 είναι λύση της (1). Άρα οι (1), (2) είναι ισοδύναμες.

β. $A_f=R$

Για $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 4x_1^3<4x_2^3\Leftrightarrow 4x_1^3-1<4x_2^3-1\Leftrightarrow \frac{4x_1^3-1}{3}<\frac{4x_2^3-1}{3}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επομένως 1-1 στο R οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε $y=\dfrac{4x^3-1}{3}\Leftrightarrow x^3=\dfrac{3y+1}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{3y+1}{4}}$, $y\ge-\dfrac{1}{3}$ ή $x=-\sqrt[3]{-\dfrac{3y+1}{4}}$, $y<-\dfrac{1}{3}$

οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{4}}, & x\geq -\dfrac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{-\dfrac{3x+1}{4}}, & x<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών των f και f^{-1} πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$. Σύμφωνα με το α ερώτημα είναι:

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 4x^3-3x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$.

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(1,f(1))$, $B\left(-\dfrac{1}{2},f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$ δηλαδή τα

$A(1,1)$ και $B\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Παρατήρηση

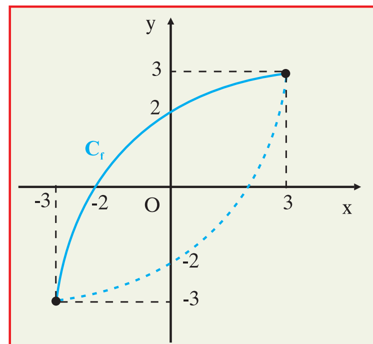
Οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ (1) και $f(x)=x$ (2) είναι ισοδύναμες μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για παράδειγμα, της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$ και η $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει λύση για κάθε $x\in R^*$, ενώ η $f(x)=x\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=x\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Επομένως δεν είναι ισοδύναμες οι (1) και (2).

Ασκηση 10

Το διπλανό σχήμα παριστάνει μια συνάρτηση f η οποία είναι 1 -1 στο [-3,3].
Να προσδιορίσετε την τιμή $f^{-1}(0)$.



Λύση

Επειδή $f(-2)=0$ έχουμε $f^{-1}(0)=f^{-1}(f(-2))=-2$

Ασκηση 11

Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει η ιδιότητα $f^2(x)\leq f(x)f(1-x)$ για κάθε $x\in R$ (1).

Να δείξετε, ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

Λύση

Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται: $f^2(0)\leq f(0)f(1)$ (2) και για $x=1$ γίνεται: $f^2(1)\leq f(1)f(0)$ (3)

Προσθέτουμε τις (2) και (3) κατά μέλη και έχουμε :

$f^2(0)+f^2(1)\le 2f(0)f(1)\Leftrightarrow f^2(0)+f^2(1)-2f(0)f(1)\le 0\Leftrightarrow (f(0)-f(1))^2\le 0\Leftrightarrow f(0)=f(1)$.

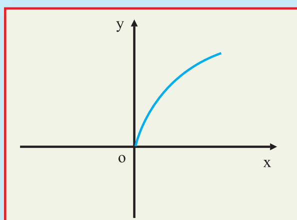
Άρα η f δεν είναι 1-1 και συνεπώς δεν αντιστρέφεται.

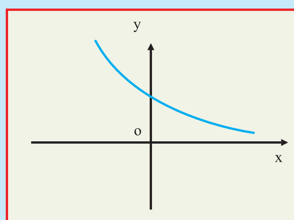
Ε. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

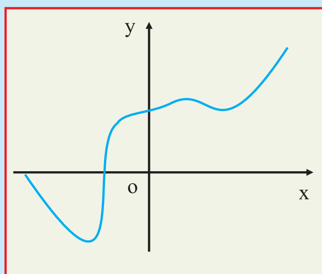
1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=4-4x+x^2$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

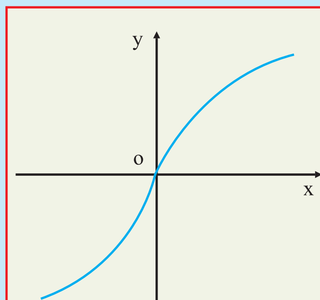
(**Απ.:** Η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$)

2. Ποια απο τις παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι γνησίως μονότονη









(**Απ.:** Η τρίτη)

3. Να αποδειχθεί, ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\dfrac{1}{3}$

(**Υπ.:** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.)

4. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x)=|x-3|+x$

(**Απ.:** Είναι $f(x)=\begin{cases}3, & x<3\\ 2x-3, & x\ge 3\end{cases}$ οπότε είναι σταθερή στο $(-\infty,3)$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-\infty,3]$ παρουσιάζει ελάχιστο το 3)

5. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x)=\log\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)$

(**Υπ.-Απ.:** $D_f=R$ Για την μονοτονία να διακρίνετε περιπτώσεις, αν $x_1<x_2<0$ και αν $0\le x_1<x_2$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ Για τα ακρότατα,

για κάθε $x \in R$, $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow ...$ και κατασκευαστικά, βρείτε το σύνολο τιμών της. Για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = \ell og3$)

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

(**Υπ.:** Διακρίνετε περίπτωσεις: Αν $x_1 < x_2 \leq 1$, αν $1 < x_1 < x_2$ και αν $x_1 \leq 1 < x_2$)

7. Να αποδειχθεί, ότι:

i. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

ii. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

(**Υπ.:** Αξιοποιείστε τους ορισμούς της μονοτονίας)

8. i. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f,g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f,g είναι διαφορετικού είδους μονοτονίας, τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως φθίνουσα.

(**Υπ.:**Ομοίως με την 7)

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ και $g(x) = 1 - \ln x$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f^{-1}og$.

(**Απ.:** $A_f = R$, $A_g = (0,+\infty)$ $f^{-1}(x) = \ell n\dfrac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, $A_{f^{-1}og} = (1,e)$ με $(f^{-1}og)(x) = \ell n\dfrac{1-\ell nx}{\ell nx}$)

10. Έστω η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R και για την οποία ισχύει $f(f(x))=x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθεί, ότι: $f(x)=x$.

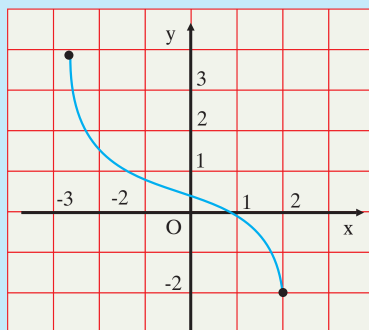
(**Απ.:**Εστω, ότι υπάρχει $x_0 \in R$ έτσι ώστε $f(x_0) > x_0$ (1). Επειδή η $f \uparrow$ έχουμε $f(f(x_0)) > f(x_0)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $f(f(x_0)) > x_0$, που είναι άτοπο λόγω υπόθεσης.Ανάλογα αν υπάρχει $x_0 \in R$: $f(x_0) < x_0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(x) = x$, για κάθε $x \in R$)

11. Η διπλανή γραφική παράσταση παριστάνει την 1 - 1 συνάρτηση f.

Ποιο είναι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης f^{-1};

(**Υπ.:**Θυμηθείτε ποιο είναι το σύνολο τιμών της f^{-1}. Το μέγιστο είναι το 2)



12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(2x-3)$, $g(x)=\sqrt{x-2}+3$

α. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1}.

β. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f^{-1}\circ g^{-1}$ και $g^{-1}\circ f^{-1}$

(**Απ.:** $A_f=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, $A_g=[2,+\infty)$, **α.** $f^{-1}(x)=\frac{e^x+3}{2}$, $x\in R$, $g^{-1}(x)=(x-3)^2+2$, $x\in[3,+\infty)$

β. $(f^{-1}og^{-1})(x)=\frac{e^{(x-3)^2}+3}{2}$, $x\in[3,+\infty)$ $(g^{-1}of^{-1})(x)=\left(\frac{e^x+3}{2}-3\right)^2+2$, $x\in[\ell n3,+\infty)$)

13. Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$, για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι : **α.** $f(1)=1$, **β.** Η συνάρτηση $g(x)=1+x^2-xf(x)$ δεν είναι 1 -1.

(**Απ.: α.** Από τη δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε: $f(f(1))=1$ και για $x=f(1)$ έχουμε: $f(f(f(1)))=f^2(1)-f(1)+1$ οπότε $f(1)=f^2(1)-f(1)+1\Leftrightarrow...\Leftrightarrow f(1)=1$.

β. Βρείτε το $g(0)$ και το $g(1)$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ (1)

Να δείξετε ότι:

i. $f(1)=0$ **ii.** $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

iii. Με την παραδοχή, ότι η μονάδα είναι η μοναδική τιμή του x με $f(x)=0$, να δείξετε ότι αν s,t είναι διακεκριμένοι θετικοί, τότε $f(s)\neq f(t)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(f\,o\,f)(x)=x^2-x+1$ για κάθε $x\in R$.

Να δείξετε ότι:

i. $f(1)=1$ **ii. η συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)=x^2-x\cdot f(x)+1$ δεν αντιστρέφεται.**

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2\cdot 10^x+10^{2x}}{1+10^x}$, $x\in R$ και $g(x)=\frac{10^x+10^{2x}}{1+10^x}$, $x\in R$

i. Να δείξετε ότι η g(x) είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντιστροφή της.

ii. Να βρεθεί η συνάρτηση $h(x)=f\,o\,g^{-1}(x)$.



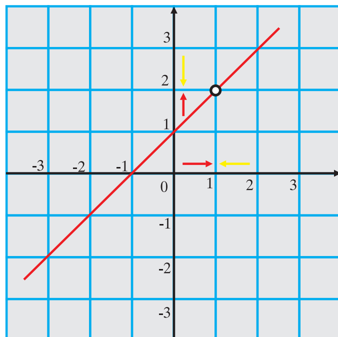
Όριο συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Για την “τοπική” μελέτη μιας συνάρτησης f ενδιαφέρον έχει η συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω απο κάποια θέση x_0 (δηλαδή όταν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0) ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\ x\neq 1$

Η παραπάνω συνάρτηση ενώ δεν ορίζεται για x = 1, όμως μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της γύρω και πολύ κοντά στη θέση $x = 1$.



Παρατηρούμε ότι :

Αν το x πλησιάζει το 1 ***απο τα αριστερά*** , το f(x) πλησιάζει τον αριθμό 2 με $f(x)<2$.

Αν το x πλησιάζει το 1 ***απο τα δεξιά*** ,το f(x) πλησιάζει πάλι τον αριθμό 2 με $f(x)>2$.

Λέμε τότε ότι **το όριο της f όταν το x τείνει στο 1 είναι το 2** , και συμβολικά γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

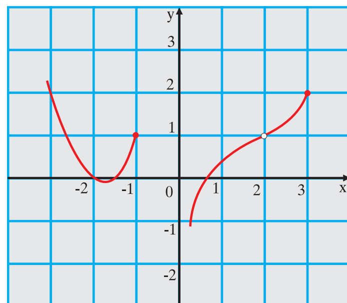
Γενικότερα, ο συμβολισμός $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ σημαίνει ότι όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 τότε το f(x) παίρνει τιμές κοντά στο $\ell\in R$.

Παρατήρηση :

Απο τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι φανερό οποιοδήποτε όριο της.

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα παρατηρήστε ότι:

$\lim_{x\to 3} f(x)=2,\ \lim_{x\to 2} f(x)=1,\ \lim_{x\to -1} f(x)=1,\ \lim_{x\to -2} f(x)=0$



Παρατηρήστε ότι τα - 2,- 1,3 ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της f, ενώ το 2 δεν ανήκει στο A, αλλά υπάρχουν σημεία του A κοντά στο $x = 2$.

Όρια όπως $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$,δεν έχουν νόημα, αφού για τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 4 που δεν ανήκουν στο Α δεν υπάρχουν και σημεία του Α κοντά σ'αυτά.

Επομένως:

Αν f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α τότε το όριο της f στο x_0 έχει νόημα αν :

- **το x_0 ανήκει στο Α και υπάρχουν σημεία του Α κοντά στο x_0.**
- **το x_0 δεν ανήκει στο Α αλλά υπάρχουν σημεία του Α κοντά στο x_0.**

Τα παραπάνω συμβαίνουν αν το x_0 είναι τουλάχιστον ανοικτό άκρο του πεδίου ορισμού της f.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

Αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 (ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός κοντά στο 0) τότε η f θα λαμβάνει οπωσδήποτε **πολύ μεγάλες τιμές κατ'άπόλυτη τιμή.**

Ειδικότερα ,αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 και είναι $x > 1$(ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός κοντά στο 0 θετικός), τότε οι τιμές της f θα είναι πάρα πολύ μεγάλοι θετικοί αριθμοί.

Λέμε τότε ότι :

"η f έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 1 απο τα δεξιά " και γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

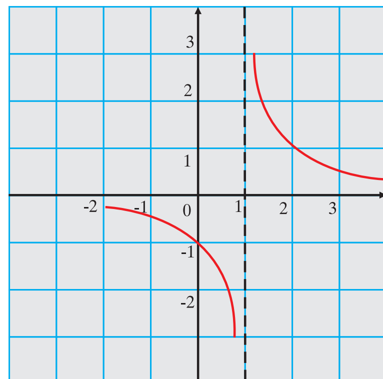
Αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 και είναι $x<1$(ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός αρνητικός), τότε οι τιμές της f θα είναι αρνητικές.

Λέμε τότε ότι :

" η f έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο 1 απο τα αριστερά " και γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$.

Τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ονομάζονται **πλευρικά όρια** της f στη θέση $x=1$.

Αν ένα τουλάχιστον απο τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης στη θέση x_0 είναι άπειρο $(\pm\infty)$ τότε η γραφική παράσταση της f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την ευθεία με εξίσωση $x=x_0$.



Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x-1}$ που έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$, τα πλευρικά όρια ερμηνεύονται γραφικά στο διπλανό σχήμα .

Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f σε κάποια θέση $x=x_0$ είναι ίσα τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της f στη θέση $x=x_0$ το οποίο συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Τότε ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f σε κάποια θέση $x=x_0$ δεν είναι ίσα τότε λέμε ότι **δεν υπάρχει το όριο της f στη θέση $x=x_0$.**

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,οπότε συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στη θέση $x=1$ δεν υπάρχει.

Παρατήρηση :

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ μπορούμε να τα "χειριζόμαστε" σε αρκετές περιπτώσεις ως αριθμούς με τα πρόσημά τους να παίζουν τον ίδιο ρόλο με αυτά των αριθμών.

Όλες οι πράξεις μεταξύ του $\pm\infty$ και πραγματικών αριθμών (εκτός του μηδενός) ορίζονται με τον προφανή τρόπο.

Ισχύει για παράδειγμα,

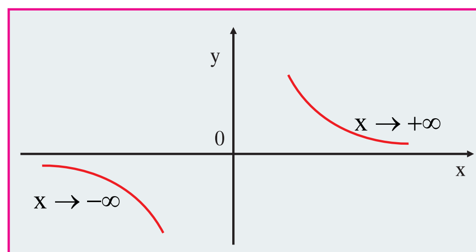
$(+\infty)-2002=+\infty$, $(-\infty)-1960=-\infty$, $(-2)\cdot(-\infty)=+\infty$, $\frac{+\infty}{100}=+\infty$,$(-\infty)^{10}=+\infty$.

Υπάρχουν όμως και πράξεις που δεν είναι επιτρεπτές. Αυτές είναι οι :

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(+\infty)-(+\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$, οι οποίες μαζί με τις $\frac{0}{0}$, 0^0 αποτελούν τις απροσδιόριστες μορφές που θα μελετήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{x}$.Όταν ο παρονομαστής είναι μεγάλος κατ' απόλυτη τιμή , δηλαδή όταν το x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η τιμή της f βρίσκεται πολύ κοντά στο 0.

Γράφουμε τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.



Γραφικά αυτό σημαίνει ότι η C_f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$, **οριζόντια ασύμπτωτη** την ευθεία $y=0$ (βλ. σχήμα).

Επειδή $f(x)>0$ όταν x τείνει στο $+\infty$, η καμπύλη προσεγγίζει την y = 0 απο "πάνω" στο $+\infty$.

Ομοίως επειδή $f(x)<0$ όταν x τείνει στο $-\infty$, η καμπύλη προσεγγίζει την $y=0$ απο "κάτω" στο $-\infty$.

Γενικότερα , αν για μια συνάρτηση f ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k\in R$ **η** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in R$ **τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.**

Σχόλιο

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$ η $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα.

Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ή και την ίδια.

Απο τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι αναζητούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες συναρτήσεων στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού εκτός των $\pm\infty$.

π.χ. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+1)}$, έχουμε :

-∞	-1		2	+∞
+	0	−	0	+

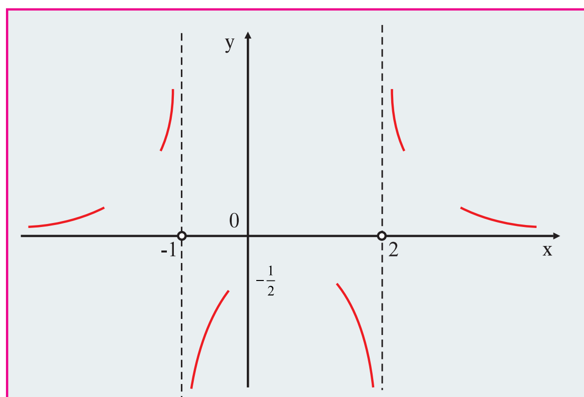
πρόσημο του (x - 2)(x + 1)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

Άρα οι ευθείες $x = 2$ και $x = -1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ και συνεπώς η ευθεία $y = 0$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Με τη βοήθεια και μόνο των παραπάνω ορίων κάνουμε μια αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων):

Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(k\cdot f(x)\big) = k\lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ k\in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{\nu} = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)^{\nu}\ ,\ \nu\in \mathbb{N} \text{ με } \nu\geq 2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \Big|\lim_{x\to x_0} f(x)\Big|$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \text{ με } f(x)\geq 0 \text{ κοντά στο } x_0\ ,\ \nu\in \mathbb{N} \text{ με } \nu\geq 2 .$$

Πρόσημο του ορίου μιας συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση έχει στο x_0 όριο έστω $\ell \neq 0$, τότε σε μια περιοχή (αρκετά κοντά) του x_0 οι τιμές της f έχουν το πρόσημο του ορίου της.
Δηλαδή :

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Προσοχή !! Το αντίστροφο δεν ισχύει. Διότι μπορεί μια συνάρτηση να είναι θετική κοντά στο x_0 και το όριό της να είναι μηδέν ή άπειρο.
Δηλαδή ισχύουν :

Αν $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \geq 0$ ή το $+\infty$.

Αν $f(x) < 0$, κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \leq 0$ ή το $-\infty$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Υπολογισμός ορίου στη θέση x_0 με x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **, αν** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2002(x-1)}{e^{x^2+3x}}$

Λύση

Είναι : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2002(x-1)}{e^{x^2+3x}} = \dfrac{2^2 - 2002(2-1)}{e^{2^2+3\cdot 2}} = \dfrac{-1998}{e^{10}}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Αν η συνάρτηση είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρονομαστής στη θέση x_0 ενώ δεν μηδενίζεται ο αριθμητής, τότε το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει.
Εξετάζουμε το πρόσημο της συνάρτησης γύρω απο τη θέση x_0. Αν το πρόσημο του παρονομαστή αλλάζει γύρω απο τη θέση x_0, τότε πρέπει να θεωρήσουμε οπωσδήποτε τα πλευρικά όρια .
Αποδεικνύεται ότι :

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Παράδειγμα 2

i. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **, αν** **α.** $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, **β.** $f(x)=\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

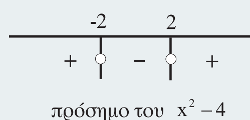
i. α. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$.Ωστόσο το x - 2 δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο γύρω απο το $x=2$.
Γι' αυτό θα προσδιορίσουμε τα πλευρικά όρια.

Αν το $x\to 2^+$ τότε $x>2$ δηλ. $x-2>0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

Αν το $x\to 2^-$ τότε $x<2$ δηλ. $x-2<0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ και ο παρονομαστής αλλάζει πρόσημο γύρω απο το 2. Το όριο αν υπάρχει θα είναι οπωσδήποτε μη πεπερασμένο αφού μηδενίζεται ο παρονομαστής αλλά όχι ο αριθμητής.



Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x^3+x-5)\cdot\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=13\cdot(+\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^3+x-5)\cdot\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-4}=13\cdot(-\infty)=-\infty$

Επειδή τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο 2.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x\ge 0$ για κάθε $x\in R$ και συνεπώς $1-\sigma\upsilon\nu x>0$, για κάθε x κοντά στο 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((2x-1)\cdot\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)=-\infty$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Αν η συνάρτηση είναι ρητή και μηδενίζεται και ο αριθμητής και ο παρονομαστής στη θέση x_0, τότε το όριο σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός το $+\infty$ ή το $-\infty$ ή να μην υπάρχει. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα δεν είναι μονοσήμαντο , γι'αυτό λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.
Για να το προσδιορίσουμε παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή και διαγράφουμε τον παράγοντα που δημιουργεί την απροσδιοριστία , δηλαδή τον $(x-x_0)^\nu$, $\nu\in N^*$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^2-4x-12}$**.**

Λύση

Είναι : $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-2x+4\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-4x-12\right)=0$ δηλαδή έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$. Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή έχουμε :

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-2x+4}{x^2-4x-12}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x^2-2x+2)}{(x+2)\cdot(x-6)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+2}{x-6}=\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Αν στο όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ παρουσιάζεται η απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ και ο τύπος της f περιέχει απόλυτο τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται στο απόλυτο μηδενίζεται για $x=x_0$ απαλλασσόμαστε από το απόλυτο θεωρώντας πλευρικά όρια.
- Αν η παράσταση που βρίσκεται στο απόλυτο δεν μηδενίζεται για $x=x_0$ απαλλασσόμαστε από το απόλυτο υποθέτοντας ότι το x είναι σε κατάλληλο διάστημα αρκετά κοντά στο x_0.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα όρια :

i . $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x^3-4x^2|}{x^2-16}$ **ii .** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-|4x-3|}{x-1}$

Λύση

i. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ αφού είναι : $\lim\limits_{x\to 4}|x^3-4x^2|=0$ και $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-16)=0$

Για να “απαλλαγούμε” απο το απόλυτο θεωρούμε τα πλευρικά όρια.

Αν $x\to 4^-$ τότε είναι $x<4$ δηλ. $x-4<0$, οπότε : $|x^3-4x^2|=|x^2(x-4)|=-x^2(x-4)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{|x^3-4x^2|}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-x^2(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-x^2}{x+4}=\dfrac{-16}{8}=-2$.

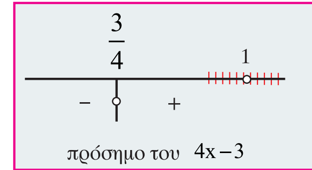
Αν $x\to 4^+$ τότε είναι $x>4$ δηλ. $x-4>0$, οπότε : $|x^3-4x^2|=|x^2(x-4)|=x^2(x-4)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{|x^3-4x^2|}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2}{x+4}=\dfrac{16}{8}=2$.

Απο τα παραπάνω προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-2\neq 2=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ και συνεπώς δεν υπάρχει το όριο της f όταν το x τείνει στο 4.

ii. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ αφού είναι : $\lim_{x\to1}\left(x^2-|4x-3|\right)=0$ και $\lim_{x\to1}(x-1)=0$

Εδώ όμως η παράσταση 4x - 3 που είναι στο απόλυτο δεν μηδενίζεται για x = 1. Αν θεωρήσουμε ότι το x είναι πολύ κοντά στο 1 τότε: $x>\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x>3\Leftrightarrow 4x-3>0$



και συνεπώς $|4x-3|=4x-3$

Άρα $\lim_{x\to1}\frac{x^2-|4x-3|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-(4x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-3)=-2$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και ο τύπος της συνάρτησης περιέχει νιοστές ρίζες τότε μετασχηματίζουμε τον τύπο πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με κατάλληλη παράσταση ώστε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα για τη διαφορά των νιοστών δυνάμεων.

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1}}$$

Ειδικά όταν έχουμε τετραγωνικές ρίζες πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση. Η συζυγής της $\sqrt{A}-B$ είναι η $\sqrt{A}+B$ και της $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ είναι η $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ **ii.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ **iii.** $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

Λύση

i. Έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση της $\sqrt{x+1}-1$: Είναι $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

ii. Αν θέσουμε $\sqrt[3]{x+8}=\alpha$ και $\sqrt[3]{8}=2$ τότε σύμφωνα και με την ταυτότητα που αναφέραμε

έχουμε: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^3-\left(\sqrt[3]{8}\right)^3}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right]}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}=\frac{1}{12}$$

iii. Όταν έχουμε ρίζες διαφορετικής τάξης θέτουμε $\sqrt[k]{x}=\lambda$ όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων . Για την περίπτωσή μας θέτουμε $\sqrt[12]{x}=\lambda$ οπότε $\sqrt[3]{x}=\lambda^4$, $\sqrt[4]{x}=\lambda^3$, $\sqrt{x}=\lambda^6$ και όταν $x\to 1$ το $\lambda\to 1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda^6-\lambda^4}{\lambda^4-\lambda^3}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda^4\left(\lambda^2-1\right)}{\lambda^3\left(\lambda-1\right)}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\lambda(\lambda+1)=2$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους τότε για να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης στη θέση αλλαγής των κλάδων υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στη θέση αυτή.

Παράδειγμα 6

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^4+1 & ,\ \text{αν } x\le 1\\ -3\eta\mu(\pi x)+8x-6 & ,\ \text{αν } x>1\end{cases}$ **έχει όριο στο** $x_0=1$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το όριο της f στη θέση x = 1, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια στο 1.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^4+1\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[-3\eta\mu(\pi x)+8x-6\right]=-3\eta\mu\pi+8-6=2$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Τριγωνομετρικά όρια:

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε άμεσα το βασικό όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

Πολλές φορές ο υπολογισμός ενός ορίου διευκολύνεται με αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 10x}{x}\right)$, **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$, **γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{2x-\sqrt{x}-1}$.

Λύση

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 10x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 10x}{10x}10\right)=10\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 10x}{10x}=10\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=10\cdot 1=10$

(θέσαμε $\omega = 10x$, οπότε όταν $x \to 0$ τότε $\omega \to 0$)

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$, αφού όταν $x \to 1$ το $x-1=\omega \to 0$.

γ. Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{2x-\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)}{(x-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}\right) = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 8
Το κριτήριο παρεμβολής

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει δεν θα τα καταφέρουμε. Όρια όπως το παραπάνω υπολογίζονται έμμεσα με τη βοήθεια του επόμενου κριτηρίου:

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in R$ και για τις συνρτήσεις f, g, h ισχύει: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Για το παραπάνω όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 0$, διότι: $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$, αφού $\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ οπότε $-|x| \le x\eta\mu\dfrac{1}{x} \le |x|$ με $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

Παράδειγμα 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $\dfrac{\eta\mu x}{x} \le f(x) \le 2x^2+1$, για κάθε $x \ne 0$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1) = 1$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9
Εύρεση του ορίου με την χρήση βοηθητικής συνάρτησης της οποίας γνωρίζουμε το όριο.

Παράδειγμα 9

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$ **.**

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

Λύση

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}$, $x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$. Για κοντά στο 0 ισχύει

$$g(x)\left[\sqrt{x+1}-1\right]=f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu x}g(x),$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\eta\mu x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{\eta\mu x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}(-\infty)=-\infty$.

Κατηγορία – Μέθοδος 10
Μετατροπή του κλάσματος σε άθροισμα δύο ή περισσότερων κλασμάτων των οποίων οι απροσδιοριστίες αντιμετωπίζονται με την τεχνική της προσθαφαίρεσης.

Παράδειγμα 10

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2}=4$ **. Για ποια τιμή του** $\lambda\in R$ **η συνάρτηση** $g(x)=\dfrac{xf(x)-3\lambda-\lambda^2}{x^2-4}$ **έχει στο** $x_0=2$ **όριο τον πραγματικό αριθμό** ℓ **.**

Λύση

Θεωρούμε $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-x}{x-2}$, $x\neq 2$. Άρα $f(x)=\varphi(x)(x-2)+x$ με x κοντά στο 2.

Το $\lim\limits_{x\to 2}\left[\varphi(x)(x-2)+x\right]=4\cdot 0+2=2$ άρα και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Θα υποστηρίξουμε ότι: "Το όριο **και** του αριθμητή της g πρέπει να είναι 0 αφού το όριο της g είναι πραγματικός αριθμός".

Για $x \neq 2$ και $x \neq -2$ είναι $\ell im_{x\to 2}\left[g(x)(x^2-4)\right] = \ell \cdot 0 = 0$.

Άρα και το $\ell im_{x\to 2}\left[xf(x) - 3\lambda - \lambda^2\right] = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2 - 3\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -4$

Για να είναι αποδεκτές αυτές οι τιμές πρέπει να δείξουμε ότι το $\ell im_{x\to 2} g(x) = \ell$, $\ell \in R$

"Θα αξιοποιήσουμε το $\ell im_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2} = 4$ *"*

Για $\lambda = 1$

$$\ell im_{x\to 2} g(x) = \ell im_{x\to 2}\frac{xf(x)-4}{x^2-4} = \ell im_{x\to 2}\frac{xf(x)-x^2+x^2-4}{x^2-4} = \ell im_{x\to 2}\frac{x(f(x)-x)+x^2-4}{x^2-4} =$$

$$\ell im_{x\to 2}\left[\frac{x(f(x)-x)}{x^2-4}+\frac{x^2-4}{x^2-4}\right] = \ell im_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-x}{x-2}\cdot\frac{x}{x+2}+1\right] = 4\cdot\frac{2}{4}+1 = 3$$

Άρα το $\lambda = 1$ είναι δεκτό.

Για $\lambda = -4$

$\ell im_{x\to 2} g(x) = \ell im_{x\to 2}\dfrac{xf(x)-4}{x^2-4} = 3$ (το βρήκαμε προηγουμένως). Άρα και το $\lambda = -4$ είναι δεκτό.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3x+\alpha}{x^2+4x+3}$ να έχει όριο πραγματικό αριθμό όταν το x τείνει στο - 1.

(**Απ.:** α = 2)

2. Να προσδιορίσετε τους α,β ώστε η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (\beta+2)x + 2 & , x < -1 \\ 8x^2 + \alpha + \beta & , -1 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x + \beta & , x > 1 \end{cases}$$

να έχει όριο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

(**Απ.:** α = β = – 4)

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 3}\dfrac{|x-3| + x^2 - 5x + 6}{x-3}$.

(**Απ.:** Δεν υπάρχει)

4. Να βρεθούν τα επόμενα όρια : **i.** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3+5x^2-17x+6}$, **ii.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$,

iii. $\lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{x^2-9}{(x-3)^3(x+3)}$, **iv.** $\lim\limits_{x\to -1^-} = \dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

(**Απ.: i.** 1, **ii.** Δεν υπάρχει, **iii.** $+\infty$, **iv.** $+\infty$)

5. Να βρεθούν τα επόμενα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{2\sqrt{x}-3x+1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$

(**Απ.: ii.** 6)

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ σε κάθε περίπτωση :

i. $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-2x^2+x-1\right)=2$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+1}{x-3}=8$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x}{2x^2-18}=5$

(**Απ.: i.** 17 , **ii.** -1, **iii.** 6)

7. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=5$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\left(2x^2+x-10\right)\right]=3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ \dfrac{5}{3}\right)$

8. Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}$, $\alpha,\beta\in R$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

9. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει : $|\sigma\upsilon\nu x-1|\le f(x)\le|x|$ και $e^x-1\le g(x)\le x$, για κάθε $x\in R$, να βρεθούν τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, **β.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(**Απ.: α.** 0, **β.** 0)

10. Έστω συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού R και τέτοιες ώστε να ισχύουν :

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x+4}-2\right)g(x)\right]=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$$

Να βρείτε τα όρια : **α.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu x\right)$.

(**Απ.: α.** 0, **β.** 20)

11. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ τέτοια ώστε :

$$f^2(x)+5f(x)=5\ln x+4 \text{ ,για } x>0.$$

i. Δείξτε ότι η f είναι 1 - 1 στο διάστημα $(0,+\infty)$.
ii. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.
iii. Βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to 0} f^{-1}(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$.

12. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε : $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$ για κάθε $x \in R$.

Να δειχθεί: **i.** $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, **ii.** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2}$.

13. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε : **i.** $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ **ii.** $xf(x)\ge \eta\mu x$

Βρείτε το $f(0)$.

(**Απ.:** $f(0)=1$)

14. Δίνονται συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού Α που περιέχει το 0.

Αν $\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{4x^2+x+9}-3\right)\cdot g(x)\right]=15$, $\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)=\alpha^2+67\alpha$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha f(x)}{\eta\mu(\alpha x)}=4$, να βρεθεί ο θετικός αριθμός α και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα επόμενα όρια : $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ (αν υπάρχουν).

(**Απ.:** $\alpha=5$, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει)

15. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha}-\beta}{1-\sigma\upsilon\nu x}=1$.

(**Απ.:** $\alpha=\beta=1$)

16. Έστω συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\sqrt{5x+6}\le f(x)\le \frac{5x+22}{8}$ για κάθε $x\in R$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(**Απ.:** $\lim_{x\to 2} f(x)=4$)

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Αν $\eta\mu(\alpha x)\le \eta\mu(\beta x)+\eta\mu(\gamma x)$ για κάθε x με $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε $\alpha=\beta+\gamma$.

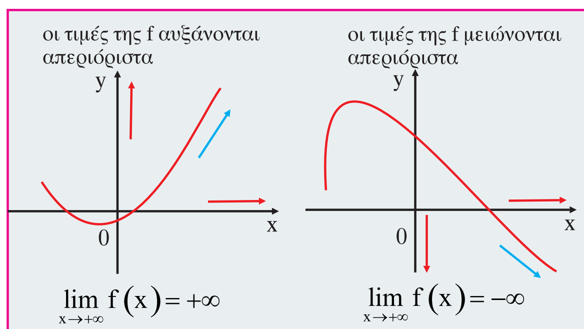
Β. Να υπολογίσετε το όριο των ριζών της εξίσωσης $hx^2+\alpha x-\beta=0$ με $h\ne 0$ όταν $h\to 0$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in R$.



Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$

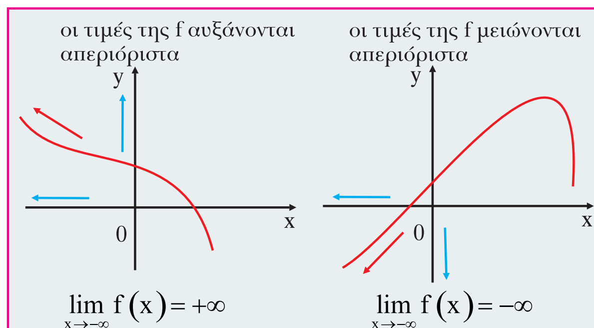
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **αυξάνονται απεριόριστα** όταν το x αυξάνεται απεριόριστα, λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $+\infty$ **είναι το** $+\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **μειώνονται απεριόριστα** όταν το x αυξάνεται απεριόριστα, λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $+\infty$ **είναι το** $-\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **αυξάνονται απεριόριστα** όταν το x μειώνεται απεριόριστα, λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $-\infty$ **είναι το** $+\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **μειώνονται απεριόριστα** όταν το x μειώνεται απεριόριστα, λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $-\infty$ **είναι το** $-\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Δίνουμε παρακάτω τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ βασικών συναρτήσεων.

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $\nu \in N^*$	Αν ν άρτιος : $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = +\infty$ Αν ν περιττός : $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = -\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x , όπου $\nu \in N^*$	$\lim_{x\to+\infty} x^{-\nu} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^{-\nu} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha > 0$	$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} = 0$
Εκθετικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$
Λογαριθμικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_\alpha x = -\infty$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Σχόλιο

Αν γνωρίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητο να απομνημονεύσουμε τα αντίστοιχα όρια που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ο υπολογισμός των ορίων στο άπειρο γίνεται με τους ίδιους κανόνες με τους οποίους υπολογίζουμε όρια σε πραγματικό αριθμό, εφόσον οι οριακές πράξεις που παρουσιάζονται είναι επιτρεπτές .

Θυμίζουμε τις **μη επιτρεπτές** πράξεις που σχετίζονται με το $\pm\infty$.

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} , (-\infty)+(+\infty), (+\infty)-(+\infty) , 0\cdot(\pm\infty) , (+\infty)^0 , 1^{+\infty}$$

Ακόμη πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι για τα όρια στο άπειρο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης ισχύουν :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \alpha_\nu x^\nu = \alpha_\nu \lim_{x\to\pm\infty} x^\nu =$$

$$= \begin{cases} \alpha_\nu \lim_{x\to+\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty , & \alpha_\nu > 0 \\ -\infty , & \alpha_\nu < 0 \end{cases} \\ \alpha_\nu \lim_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} \begin{cases} -\infty, & \alpha_\nu > 0, \ \nu : \text{περιττος} \\ +\infty, & \alpha_\nu > 0, \ \nu : \text{αρτιος} \end{cases} \\ \begin{cases} +\infty, & \alpha_\nu < 0, \ \nu : \text{περιττος} \\ -\infty, & \alpha_\nu < 0, \ \nu : \text{αρτιος} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\beta_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-\mu}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-\mu}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0\\ -\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0\\ 0, & \text{αν}\quad \nu<\mu\\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}, & \text{αν}\quad \nu=\mu\end{cases}\\[2ex] \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\nu-\mu}=\begin{cases}\begin{cases}-\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0,\ \nu-\mu:\ \text{περιττός}\\ +\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0,\ \nu-\mu:\ \text{άρτιος}\end{cases}\\ \begin{cases}+\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0,\ \nu-\mu:\ \text{περιττός}\\ -\infty, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0,\ \nu-\mu:\ \text{άρτιος}\end{cases}\\ 0, \quad \text{αν}\quad \nu<\mu\\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}, \quad \text{αν}\quad \nu=\mu\end{cases}\end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}+3x^5+2002\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}+3x^5+2002\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}\right)=-5\lim\limits_{x\to+\infty}x^{11}=(-5)(+\infty)=-\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{6x^9}=\dfrac{3}{6}\lim\limits_{x\to-\infty}x^{-4}=\dfrac{3}{6}\cdot 0=0$.

Σχόλιο

Για τα όρια ρητών συναρτήσεων στο άπειρο ισχύει ότι :

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **μεγαλύτερος** απο το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **μη πεπερασμένο** $(\pm\infty)$.

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **μικρότερος** απο το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **μηδέν.**

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **ίσος** με το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **ίσο με το πηλίκο των συντελεστών** των μεγιστοβάθμιων όρων.

Όριο ρίζας

Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[\nu]{f(x)}=+\infty$ και $f(x)>0$ κοντά στο $\pm\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^6+5x^3+10}=+\infty$,διότι :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^6+5x^3+10\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x^6\right)=3\lim_{x\to-\infty}x^6=3(+\infty)=+\infty.$$

Ο τυπικός τρόπος προσδιορισμού του ορίου είναι η εξαγωγή ως κοινού παράγοντα της μεγαλύτερης δύναμης του x.

Έτσι για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+4}-2x\right)$ παρατηρούμε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{16x^2+x+4}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, οπότε παρουσιάζεται η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ οπότε

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+4}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-2x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2\right)\right]=+\infty$$ διότι , όταν $x\to+\infty$

είναι $x>0$, άρα $|x|=x$ και $\ell im_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\ell im_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2\right)=2>0$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+42x+12}-\sqrt{25x^2-17x+1}\right)$.

Λύση

Έχουμε απροσδιοριστία $(+\infty)-(+\infty)$ και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα του αθροίσματος ορίων.
Με εξαγωγή ως κοινού παράγοντα του x^2 , έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+42x+12}-\sqrt{25x^2-17x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{42}{x}+\frac{12}{x^2}}-\sqrt{25-\frac{17}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty,$$

διότι $\ell im_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $\ell im_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{42}{x}+\frac{12}{x^2}}-\sqrt{25-\frac{17}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2-5=-3<0$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-2x\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)$ **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)$

Λύση

i. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)\right]=+\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)=5>0$

ii. Με εξαγωγή ως κοινού παράγοντα της μεγαλύτερης δύναμης του x έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)\right]=(+\infty)\cdot 0$$

Παρατηρήστε ότι καταλήξαμε σε απροσδιοριστία και επομένως το όριο αυτό δεν υπολογίζεται με τη μέθοδο της εξαγωγής του κοινού παράγοντα που αναφέραμε προηγουμένως. Για να άρουμε την απροσδιοριστία σ’αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της συζυγούς παράστασης.

Μετατρέπουμε έτσι την απροσδιόριστη μορφή ($\infty-\infty$) σε $\frac{\infty}{\infty}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{1+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{4}$$

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$

iv. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x+\sqrt{9x^2+3x+7}-3x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}+\frac{3x+7}{\sqrt{9x^2+3x+7}+3x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}+\frac{3+\frac{7}{x}}{\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}+3}\right)=\frac{3+0}{\sqrt{4+0+0}+2}+\frac{3+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{5}{4}$$

Όρια με απόλυτες τιμές

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim_{x\to-\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|+\left|2x-x^3\right|\right)$ **ii.** $\lim_{x\to+\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|-\left|2x-x^3\right|\right)$ **iii.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left|x-x^2\right|}{2x^2+42}$

Λύση

i. Σύμφωνα με την ιδιότητα : Αν $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τοτε $\lim_{x\to\pm\infty}\left|f(x)\right|=+\infty$ και επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(3-x+x^5\right)=-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(2x-x^3\right)=+\infty$, παίρνουμε :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|+\left|2x-x^3\right|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left|3-x+x^5\right|+\lim_{x\to-\infty}\left|2x-x^3\right|=+\infty+\infty=+\infty$$

ii. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της διαφοράς των ορίων αφού προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$. Γι'αυτό πρέπει να απαλλαγούμε από τα απόλυτα και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε ιδιότητες ορίων.

Για να απαλλαγούμε απο τα απόλυτα πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται μέσα σ'αυτά.

Όταν το όριο της παράστασης που βρίσκεται μέσα σε απόλυτο είναι θετικός αριθμός ή το $+\infty$ για $x\to+\infty$ τότε η παράσταση θα είναι θετική κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. (ή στο x_0 αν υπολογίζουμε όριο σε πραγματικό αριθμό).

Είναι: $\lim_{x\to+\infty}\left(3-x+x^5\right)=+\infty$, οπότε $3-x+x^5>0$, κοντά στο $+\infty$ και συνεπώς είναι:

$$\left|3-x+x^5\right|=3-x+x^5$$

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-x^3\right)=-\infty$, οπότε $2x-x^3<0$, κοντά στο $+\infty$ και συνεπώς είναι:

$$\left|2x-x^3\right|=-\left(2x-x^3\right)=x^3-2x\,.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|-\left|2x-x^3\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(3-x+x^5\right)-\left(x^3-2x\right)\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5-x^3+x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty$$

iii. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$, είναι $x-x^2<0$ στην περιοχή του $+\infty$,

οπότε $\left|x-x^2\right|=-\left(x-x^2\right)=x^2-x$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+|x-x^2|}{2x^2+42}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x}{2x^2+42}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

Όρια με τριγωνομετρικούς αριθμούς

1. Είναι $\lim_{x\to\pm\infty}\etaμ\frac{1}{x}=0$ διότι, όταν $x\to\pm\infty$ τότε $\frac{1}{x}\to 0$ οπότε $\lim_{x\to\pm\infty}\etaμ\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0}\etaμ y=\etaμ 0=0$.

Όμοια $\lim_{x\to\pm\infty}συν\frac{1}{x}=1$.

2. Επίσης $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\etaμx}{x}=0$ διότι,

$$\left|\frac{\etaμx}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\etaμx}{x}\le\frac{1}{|x|}\ \text{ και }\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)=0$$

3. Ισχύει $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\etaμ\frac{1}{x}\right)=1$ διότι, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\etaμ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\etaμy}{y}=1$

Θυμίζουμε ότι: $\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x}=1$ και γενικότερα με $ν\in N^*$ είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^ν\cdot\etaμ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{ν-1}\cdot\frac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x^{ν-1}=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^{ν-1}=\begin{cases}+\infty, & ν>1\\ 1, & ν=1\\ 0, & ν<1\end{cases}\\[2ex] \lim_{x\to-\infty}x^{ν-1}=\begin{cases}+\infty, & ν>1,\ \text{άρτιος}\\ -\infty, & ν>1,\ \text{περιττός}\\ 1, & ν=1\\ 0, & ν<1\end{cases}\end{cases}$$

και $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\etaμ^ν\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\etaμ^{ν-1}\frac{1}{x}\cdot\frac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\etaμ^{ν-1}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0$

4. Δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty}\etaμx$ και $\lim_{x\to\pm\infty}συνx$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε το όριο της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ, αν $x\to-\infty$ και $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-λx+1$.

Λύση

Είναι $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-\lambda x+1=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\lambda x+1=-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)=2+\lambda$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Αν $2+\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=+\infty$

ii. Αν $2+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=-\infty$

iii. Αν $2+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-2$ τότε έχουμε απροσδιοριστία $0\cdot(+\infty)$

Για $\lambda=-2$:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1\right)}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=$$

$$=\frac{4x^2+x+3-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{3}{4}$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \lambda<-2\\ +\infty, & \text{αν } \lambda>-2\\ \frac{3}{4}, & \text{αν } \lambda=-2\end{cases}$

Άσκηση 2

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+x+5}-x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}=2$**, να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

Λύση

Θέτουμε $u(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+x+5}-x}$ και $h(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}$

τότε είναι: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}$ (1)

Επειδή $\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+5}-x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}=$

$$\frac{(x+5)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}{(x+5)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)}=\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

προκύπτει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{2002}}{e^x}$

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{2002}}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\cdot x^{2002}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2002}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

διότι αν $0<\alpha<1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x^\nu=+\infty$, αν ο ν είναι άρτιος.

Άσκηση 4

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ **για την οποία ισχύουν** $\ell im_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ **και**

$\ell im_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=4$**. Να βρείτε το** $\mu\in R$ **ώστε το** $\ell im_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=2$**.**

Λύση

Πρέπει να εμφανίσουμε την $\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ και την $[f(x)-3x]$, διότι είναι τα μόνα όρια που γνωρίζουμε. Έτσι το όριο γράφεται:

$$\ell im_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=\ell im_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\mu-\frac{2}{x}}{f(x)-3x+1+\frac{1}{x}}=\ell im_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{f(x)}{x}\right]+\mu-\frac{2}{x}}{[f(x)-3x]+1+\frac{1}{x}}=\frac{3+\mu}{4+1}=\frac{3+\mu}{5}$$

Άρα $\frac{3+\mu}{5}=2\Leftrightarrow\mu=7$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2+x-\dfrac{3x^3+x+2}{x^2-2}\right)$ **ii.** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+5}-3x+1\right)$

iii. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+5x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$ **iv.** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+4}+3x+1\right)$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x+1}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2}-x\right)$

ii. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+2\sqrt{4x^2+x+2}-3\sqrt{x^2-x+1}+2x\right)$

iii. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}+2\sqrt{x^2+x+9}-5\sqrt{x^2+4x}\right)$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x-2}{\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{2x^2+1}}$ **ii.** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+x+2}+\sqrt[4]{2x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{5x-1}}$

4. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του μ το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ αν :

$f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+2}+\mu x-1$.

(**Απ:** Είναι $f(x)=-x\left[\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\mu+\frac{1}{x}\right]$. Αν $\mu<5$ $\ell im_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Αν $\mu>5$ $\ell im_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Αν $\mu=5$ $\ell im_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{17}{12}$)

5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $\sqrt{x^2+2}+x\le f(x)\le\dfrac{1-x}{2x^2}$ για κάθε x διάφορο απο το μηδέν, να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}(x\cdot f(x))$.

6. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε να ισχύουν:

$f(x)\neq1$, $f(x)\geq0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt[3]{f(x)}-1}$.

$\left(\textbf{Απ}:\frac{3}{2}\right)$

7. Αν ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2x}=2$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(5f(x)+4x\right)=1$, να βρείτε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2f(x)+3x^3-2x+4}{10x^3f(x)+8x^4+9x+12}.$$

8. Να βρεθούν τα α , β ,γ ώστε : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2+1}-\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=0$.

(**Απ:** $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{3}{2}$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω $f(x)=(\kappa+1)\ell nx-\ell n2+\ell n(x-1)$, $x\geq 2$, $\kappa\geq-2$. **Να προσδιοριστεί ο** $\kappa\in R$ **ώστε το** $\ell im_{x\to+\infty} f(x)$ **να είναι πραγματικός αριθμός.**

(**Απ.:** $\kappa=-2$)

Β. Αν $\ell im_{x\to+\infty}\frac{f(3x)}{f(x)}=5$ **να βρεθεί το** $\ell im_{x\to+\infty}\frac{f(243x)}{f(x)}$ **.**

(**Απ.:**Ισχύει: $\frac{f(243x)}{f(x)}=\frac{f(243x)}{f(81x)}\cdot\frac{f(81x)}{f(27x)}\cdot\frac{f(27x)}{f(9x)}\cdot\frac{f(9x)}{f(3x)}\cdot\frac{f(3x)}{f(x)}$. Άρα $\ell im_{x\to-\infty}\frac{f(243x)}{f(x)}=5^5$)



Συνέχεια συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται κοντά στο 2, τότε το f(x) βρίσκεται πολύ κοντά στο 4 ανεξαρτήτως αν $x<2$ ή $x>2$.

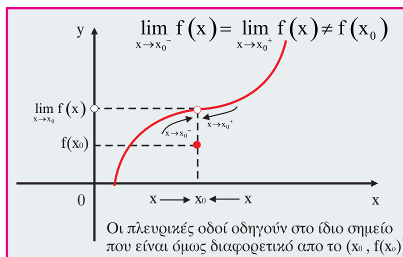
Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Το όριο αυτό συμπίπτει με την αριθμητική τιμή της f στη θέση 2, δηλαδή είναι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Αν για μια συνάρτηση ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ τότε η f ονομάζεται συνεχής συνάρτηση στη θέση $x=x_0$.

Επομένως η f είναι συνεχής συνάρτηση στη θέση $x=2$, αλλά και σε κάθε θέση $x_0\in R$. Λέμε τότε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο R.

Παρατηρήσεις

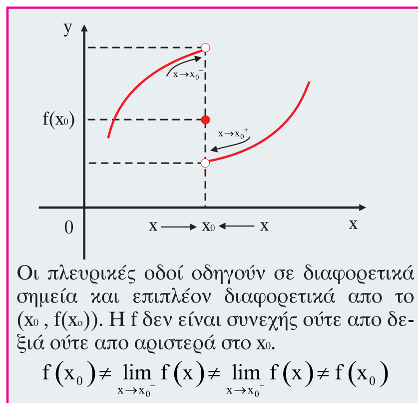
1. Για μια συνεχή συνάρτηση στο x_0 οι δύο "πλευρικές οδοί" που οδηγούν πρός τη θέση x_0, οδηγούν στο σημείο που καθορίζει η αριθμητική τιμή $f(x_0)$.



2.Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$.

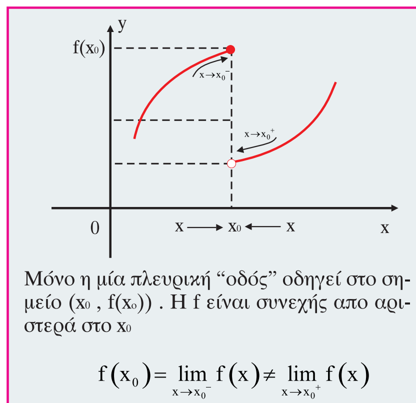
3.Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Αν όμως ισχύει : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ η $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής απο τα αριστερά ή συνεχής απο τα δεξιά αντίστοιχα του x_0.



Οι πλευρικές οδοί οδηγούν σε διαφορετικά σημεία και επιπλέον διαφορετικά απο το $(x_0, f(x_0))$. Η f δεν είναι συνεχής ούτε απο δεξιά ούτε απο αριστερά στο x_0.

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$



Μόνο η μία πλευρική "οδός" οδηγεί στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Η f είναι συνεχής απο αριστερά στο x_0

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

4. Όλες οι στοιχειώδεις συναρτήσεις καθώς και οι πράξεις μεταξύ τους ή οι συνθέσεις μεταξύ τους είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους.
Συνήθως οι συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει αμφιβολία αν είναι συνεχείς ή όχι είναι οι συναρτήσεις που δίνονται με κλάδους και γι'αυτές η αμφιβολία υπάρχει μόνο για το σημείο στο οποίο αλλάζουν οι κλάδοι.

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της , αν και μόνον αν, ισχύει :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της) , αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της .

Σχόλια

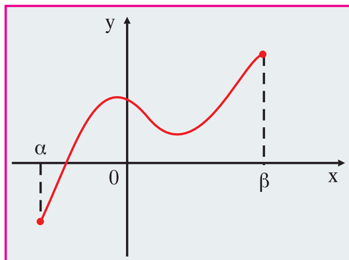
Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , αν :

α. Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 .

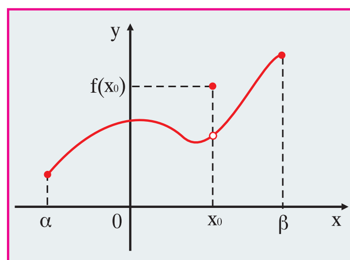
β. Υπάρχει το όριό της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό απο την τιμή της $f(x_0)$.

γ. Ένα απο τα όρια $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ είναι το $+\infty$ ή $-\infty$.

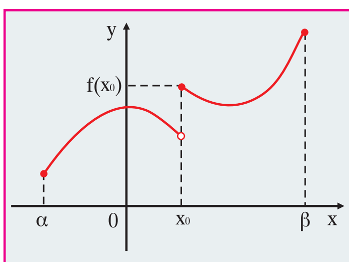
Γεωμετρική ερμηνεία της συνέχειας



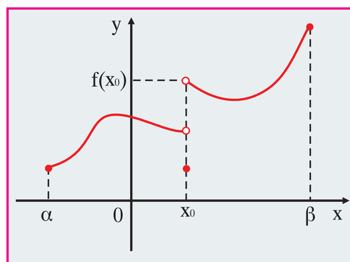
Συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [\alpha,\beta]$



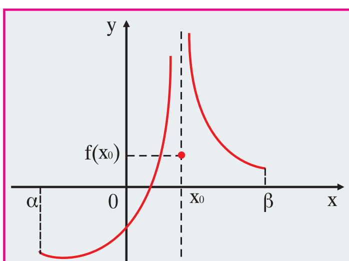
Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



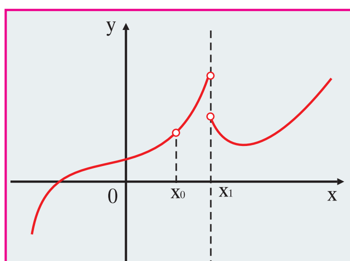
Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις ημx , συνx είναι συνεχείς στο R.
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , lnx , $\log_\alpha x$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και οι συναρτήσεις: $f+g,\ f\cdot g,\ \lambda\cdot f\,(\lambda\in R),\ \dfrac{f}{g}\big(g(x)\neq 0\big),\ |f|,\ \sqrt[\kappa]{f}\,\big(f(x)\geq 0\big)$, $\kappa\in N$ με $\kappa\geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Επίσης αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$,τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Σημείωση

Το αντίστροφο των παραπάνω δεν ισχύει διότι αν

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

η $(f+g)(x)=2x$ είναι συνεχής στο $x=0$, ενώ καμία απο τις f και g δεν είναι συνεχής στο $x=0$.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Όταν ζητείται μια συνάρτηση να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια εννοείται ότι ζητείται να μελετήσουμε αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Για κάποιες συναρτήσεις μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε αν είναι συνεχείς ή όχι χωρίς να υπολογίσουμε όρια σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω. Συνήθως οι συναρτήσεις για την συνέχεια των οποίων δεν είμαστε σίγουροι, είναι οι συναρτήσεις που δίνονται με κλάδους (πολλαπλού τύπου) . Στα σημεία αλλαγής του τύπου αυτών των συναρτήσεων εξετάζουμε αν είναι συνεχείς με χρήση πλευρικών ορίων.

Στα υπόλοιπα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους εξηγούμε για ποιό λόγο είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & , |x| \leq 2 \\ 2 & , x<-2 \\ \dfrac{2}{x-2} & , x>2 \end{cases}$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

Για κάθε $x \in (-2,2)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (πολυωνυμική).

Για κάθε $x \in (-\infty,-2)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (σταθερή).

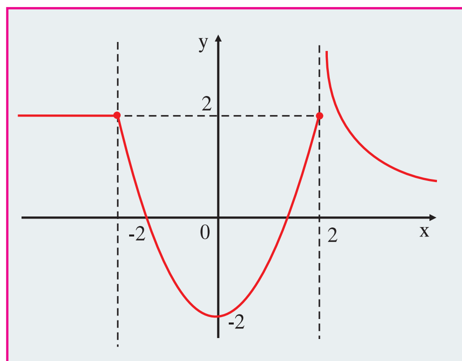
Για κάθε $x \in (2,+\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (ρητή).

Θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία αλλαγής του τύπου της στα -2 και 2.

Είναι $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{x-2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-2)=2=f(2)$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 2.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to -2^-} 2=2$ και $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^2-2)=2=f(-2)$ που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο -2.

Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο R - { 2 }.
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση της τιμής $f(x_o)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f στο x_o, αν γνωρίζουμε το όριο παράστασης που μετέχει η f, όταν $x \to x_o$.

Παράδειγμα 2

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2)}{x^2-4} = 1$ να βρεθεί η τιμή f(2).

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής στο 2 , ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.Αρκεί επομένως να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Γι' αυτό θέτουμε $h(x) = \dfrac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2)}{x^2-4}$ με x κοντά στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 1$ και λύνουμε ως προς την f(x).

Είναι $h(x)(x^2-4) = \eta\mu(x-2)-f(x)(x-2) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\eta\mu(x-2)-h(x)(x^2-4)}{(x-2)}$ κοντά στο 2 οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)-h(x)(x^2-4)}{(x-2)} =$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)} - \lim_{x\to 2}\big(h(x)(x+2)\big) = 1 - 1\cdot 4 = -3$$ και συνεπώς f (2) = - 3.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Εύρεση του τύπου μιας συνεχούς συνάρτησης f στη θέση x_0 όταν για $x \neq x_0$ είναι γνωστός ο τύπος ενώ στο x_0 βρίσκουμε την τιμή της από κάποιο γνωστό όριο χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f.

Παράδειγμα 3

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει: $2+f(x)(x^5-1)=\sqrt[3]{2x^2+6}$ **,**
για κάθε $x\in R$ **. Να βρείτε τον τύπο της.**

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής στο R ορίζεται σε κάθε σημείο του R.

Για κάθε $x\neq 1$ είναι: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1}$

Αφού είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει:

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+6-8}{(x^5-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)}=\frac{1}{15}$$

Επομένως είναι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1} & ,\ x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{15} & ,\ x=1\end{cases}$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και για την οποία f γνωρίζουμε:

i. Ότι ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση.

ii. Ότι είναι συνεχής σε κάποια θέση α του πεδίου ορισμού της.

Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\Delta$

Επειδή το μόνο όριο που γνωρίζουμε είναι το όριο της f όταν $x\to\alpha$, θα αλλάξουμε μεταβλητή και στη θέση του x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$, μη σταθερή, η οποία θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α. Θα είναι $\lim_{h\to\alpha} g(h)=x_0$.

β. Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Συνηθισμένα παραδείγματα επιλογης της $g(h)$ φαίνονται παρακάτω:

1. Η f συνεχής στο 0 και άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Θα έχουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$.

Η $g(h)$ που επιλέξαμε είναι $g(h)=x_0+h$. Θέτουμε όπου $x \to x_0+h$

2. Η f συνεχής στο 1 και άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Εδώ θα έχουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 1} f(x_0h)$.

Η $g(h)$ που επιλέξαμε είναι $g(h)=x_0\cdot h$. Θέτουμε όπου $x \to x_0\cdot h$.

3. Η f συνεχής στο α και άρα $\lim_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$.

Πρώτη επιλογή: (εξαρτάται από την συναρτησιακή σχέση)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to \alpha} f\left[(x_0-\alpha)+h\right]$ εδώ $g(h)=(x_0-\alpha)+h$.

Θέτουμε όπου $x \to (x_0-\alpha)+h$.

Δεύτερη επιλογή: (εξαρτάται από την συναρτησιακή σχέση)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to \alpha} f\left[\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)h\right]$ εδώ $g(h)=\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)h$. Θέτουμε όπου $x \to \left(\frac{x_0}{\alpha}\right)h$.

Παράδειγμα 4

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$.

i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο α με $\alpha\neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

iii. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για $x\in R$.

Λύση

i. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)f(h)\right]=f(x_0)f(0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

ii. Η f συνεχής στο α, άρα $\lim_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$

Είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to \alpha} f\left[(x_0-\alpha)+h\right]=\lim_{h\to \alpha}\left[f(x_0-\alpha)\cdot f(h)\right]$

$=f(x_0-\alpha)\cdot f(\alpha)=f\left[(x_0-\alpha)+\alpha\right]=f(x_0)$. Άρα η f συνεχής στο R.

iii. Για $x=y=\frac{\omega}{2}$ είναι $f\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right)=f\left(\frac{\omega}{2}\right)f\left(\frac{\omega}{2}\right)\Leftrightarrow$

$f(\omega)=f^2\left(\frac{\omega}{2}\right)>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Παράδειγμα 5

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R^*$. Αν η f είναι συνεχής στο α με $\alpha\neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R*.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$. Στο τυχαίο x_0 με $x_0\neq\alpha$ και $x_0\neq 0$ είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to\alpha} f\left(\frac{x_0}{\alpha}h\right)=\lim_{h\to\alpha}\left[f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)+f(h)\right]=f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)+f(\alpha)=f\left(\frac{x_0}{\alpha}\alpha\right)=f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο R*.

Παράδειγμα 6

Για την συνάρτηση f που είναι συνεχής στο 3, ισχύει η σχέση $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ με $\alpha,\beta\in R^*$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R*.

Λύση

Γνωρίζουμε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 3} f\left(\frac{x_0}{3}h\right)=\lim\limits_{h\to 3} f\left(\frac{x_0}{3}\right)f(h)=f\left(\frac{x_0}{3}\right)f(3)=f\left(\frac{x_0}{3}3\right)=f(x_0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο R*

Παράδειγμα 7

Έστω f με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)|\leq\kappa|x-y|$ (1) για κάθε $x,y\in R$ και $\kappa>0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Λύση

Για την απόδειξη της συνέχειας στο R αρκεί να δείξουμε ότι στο τυχαίο x_0 είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$$

Για $y=x_0$ (x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός) η (1) γίνεται:

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\kappa|x-x_0| \Leftrightarrow -\kappa|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq\kappa|x-x_0|$$

Από το θεώρημα παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to x_0}\kappa|x-x_0|=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\kappa|x-x_0|\right)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο R.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε το θετικό και διάφορο του 1 αριθμό α, ώστε η συνάρτηση f με :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^{2x} & ,\ 0\le x\le 2\\ \alpha\cdot\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} & ,\ 2<x<\pi\end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι συνεχής στο διάστημα $(2,\pi)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να είναι η f συνεχής στο $[0,\pi)$ πρέπει να είναι συνεχής και στη θέση $x=2$.
Είναι:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\alpha^{2x}=\alpha^4=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\alpha\cdot\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+2)}=\alpha\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{4}$$

Επομένως πρέπει : $\alpha^4=\dfrac{\alpha}{4}\Leftrightarrow 4\alpha^4-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha\cdot(4\alpha^3-1)=0\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$, $(0<\alpha\ne 1)$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ \beta x+2\alpha-1, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$

να είναι συνεχής στο R .

Λύση

Η f είναι συνεχής για κάθε $x<1$ ως ρητή και για κάθε $x>1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Για να είναι συνεχής στο R αρκεί να είναι συνεχής και στο $x=1$.

Πρέπει $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$. Είναι $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(\beta x+2\alpha-1)=\beta+2\alpha-1=f(1)$ (1)

Πρέπει τώρα να ισχύει $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}=\beta+2\alpha-1$ (2)

Απαιτούμε $\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+\alpha)=0$ διότι σε αντίθετη περίπτωση το όριο (2) θα ήταν $\pm\infty$ ή δεν θα υπήρχε. Επομένως είναι $1^2+1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-2$, τότε έχουμε :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3$$

και λόγω της (2) $\beta+2\alpha-1=3\Leftrightarrow\beta=8$ (αφού $\alpha=-2$).

Άσκηση 3

Αν οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση : $f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10\le 6f(x)+\eta\mu^2 x$
για κάθε πραγματικό αριθμό x , να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στη θέση $x=0$.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$

Η σχέση που δόθηκε για $x=0$ γράφεται :

$$f^2(0)+g^2(0)+2g(0)+10\le 6f(0)+\eta\mu^2 0 \Leftrightarrow f^2(0)+g^2(0)+2g(0)+10-6f(0)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(0)-6f(0)+9+g^2(0)+2g(0)+1\le 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2+(g(0)+1)^2\le 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2=0$$

και $(g(0)+1)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=3$ και $g(0)=-1$

Έχουμε:

$$f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10\le 6f(x)+\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10-6f(x)\le \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)-6f(x)+9+g^2(x)+2g(x)+1\le \eta\mu^2 x \Leftrightarrow 0\le (f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\le \eta\mu^2 x$$

Επειδή είναι $\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0$ απο την παραπάνω σχέση παίρνουμε :

$$\lim_{x\to 0}\left[(f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\right]=0$$

Είναι: $0\le (f(x)-3)^2\le (f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2$

και επειδή $\lim_{x\to 0}\left[(f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\right]=0$ θα είναι

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-3)^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x)-3|^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x)-3|=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}[f(x)-3]=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=3$$

Όμοια και $\lim_{x\to 0} g(x)=-1$. Δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x)=3=f(0)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-1=g(0)$,

που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x=0$.

Άσκηση 4

Αν οι συναρτήσεις f και φ ικανοποιούν τη σχέση : $f^2(x)+x^2\cdot\varphi^2(x)=x^2-1$ για κάθε πραγματικό x , να δείξετε ότι είναι συνεχείς στα σημεία $x_0=1$ και $x_1=-1$.

Λύση

Άρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1}\varphi(x)$ και $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=\lim_{x\to -1}\varphi(x)$

Η σχέση που δόθηκε για $x=1$ γράφεται :

$$f^2(1)+1^2\cdot\varphi^2(1)=1^2-1 \Leftrightarrow f^2(1)+\varphi^2(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=0 \text{ και } \varphi(1)=0$$

Επίσης είναι $f^2(x)\le f^2(x)+x^2\cdot\varphi^2(x)=x^2-1$

άρα $|f^2(x)|\le |x^2-1| \Leftrightarrow -|x^2-1|\le f^2(x)\le |x^2-1|$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

παίρνουμε : $\lim_{x\to 1} f^2(x)=\lim_{x\to 1}|x^2-1|=0$ και τελικά $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο 1. Όμοια για το -1.

Για τη συνάρτηση φ ισχύει : $x^2\cdot\varphi^2(x)=x^2-1-f^2(x)\le x^2-1$

Άρα $\left|x^2\cdot\varphi^2(x)\right|\le\left|x^2-1\right|\Leftrightarrow-\left|x^2-1\right|\le x^2\cdot\varphi^2(x)\le\left|x^2-1\right|$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2\cdot\varphi^2(x)\right)=\lim\limits_{x\to1}\left|x^2-1\right|=0$.

Έστω $h(x)=x^2\varphi^2(x)\Leftrightarrow\varphi^2(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)}{x^2}=\dfrac{0}{1}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to1}\varphi^2(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\varphi^2(x)}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\left|\varphi(x)\right|=0\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=0=1$ που σημαίνει ότι η φ είναι συνεχής στο 1. Όμοια και για $x=-1$.

Άσκηση 5

Έστω $f:R\to R$ περιττή και συνεχής σε $x_0\ne0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim\limits_{x\to-x_0}f(x)=f(-x_0)$

Πράγματι είναι: $\lim\limits_{x\to-x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to-x_0}\left(-f(-x)\right)=-\lim\limits_{-x\to x_0}f(-x)=-\lim\limits_{u\to x_0}f(u)=-f(x_0)=f(-x_0)$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι πιο κάτω συναρτήσεις

i. $f(x)\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ **ii.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x} & ,x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

2. Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda x^3+\mu x^2+5}{x-2} & ,x\ne2\\ 0 & ,x=2\end{cases}$.

Να βρεθούν τα λ,μ ώστε να η f να είναι συνεχής στο R.

(**Απ:** $\lambda=\dfrac{5}{4}$, $\mu=-\dfrac{15}{4}$)

3. Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha|x+1|+\beta|x-2|+8}{x^2+2x-3} & ,\text{αν } x>1\\ 1 & ,\text{αν } x=1\end{cases}$.

Να βρεθούν τα α , β ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

$\left(\textbf{Απ:}\ \alpha=-\dfrac{4}{3},\beta=-\dfrac{16}{3}\right)$

4. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+3\beta x-5}{x-1} & ,x\ne1\\ 7 & ,x=1\end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε να είναι η f συνεχής

(**Απ:** α = 2. β = 1)

5. Αν η f είναι συνεχής στο $x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\etaμ^2 2x+συνx-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=2$ να βρεθεί η τιμή f(0).

$\left(\textbf{Απ}: f(0)=\dfrac{3}{8}\right)$

6. Αν $f(x)=\dfrac{x^3}{f^4(x)+5}$ με $f:R\to R$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

7. Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-συν2x}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ και $g:R\to R$ τέτοια ώστε $|g(x)|\leq|f(x)-2x|$. Να δείξετε ότι g(x) συνεχής στο 0.

8. Αν οι συναρτήσεις f και y ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+17\leq 8f(x)+x^2$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι η f και η g είναι συνεχής στο 0.

9. Έστω η $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|=5|x-y|^4$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

10. Αν $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(y)$ και η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R.

11. Έστω $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $|xf(x)|\leq|x-ημx|$, για κάθε $x\neq 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $x=0$, να βρεθεί η τιμή f(0).

(**Απ**: $f(0)=0$)

12. Αν για την $f:R\to R$ ισχύει $x-x^2\leq f(x)\leq x+x^2$, για κάθε $x\in R$,να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

13. Έστω $f:R^*\to R$ τέτοια ώστε $f(xy)=f(x)f(y)$, για κάθε $x, y\in R^*$ και $f(x)\neq 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $x=2$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(α)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{α^{2x+1}+α^2}{α^{2x}+1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.



Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι:

i. Συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α,β)

ii. Συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον ισχύουν :

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

2. Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

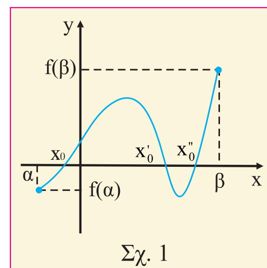
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Αν: • η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).



Σχ. 1

Γεωμετρική ερμηνεία

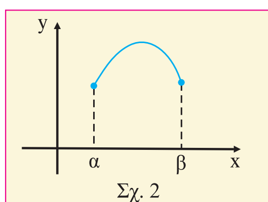
Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των α και β (σχ.1).

Παρατηρήσεις - Σχόλια

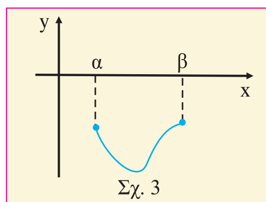
1. Το αντίστροφο του θεωρήματος BOLZANO δεν ισχύει γενικά δηλαδή η ύπαρξη ρίζας δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο [α,β] ούτε ότι οι τιμές f(α), f(β) είναι ετερόσημες

2. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας της $f(x) = 0$ αλλά δεν την προσδιορίζει.

3. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό τότε είναι θετική (σχ.2) ή αρνητική (σχ.3) για κάθε $x \in \Delta$ (διατηρεί πρόσημο).

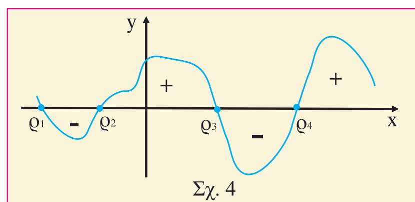


Σχ. 2



Σχ. 3

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ τότε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της διατηρεί το πρόσημο (σχ.4).

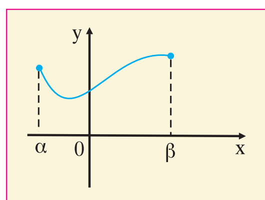


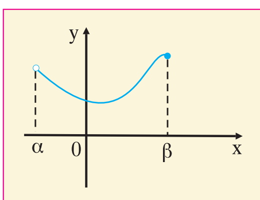
Σχ. 4

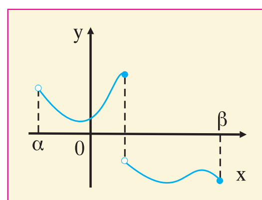
4. Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιάς τουλάχιστον λύσης της $f(x)=0$. Μπορεί όμως να υπάρχουν και περισσότερες. (σχ. 1)

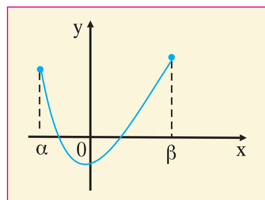
5. Εάν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano δεν ισχύουν, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ή δεν έχει λύση.

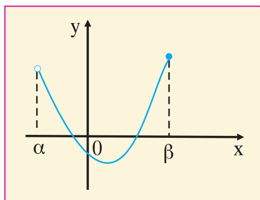
Αυτό φαίνεται στα επόμενα σχήματα .

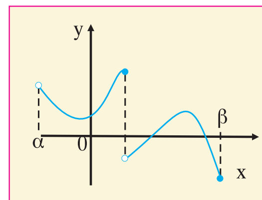










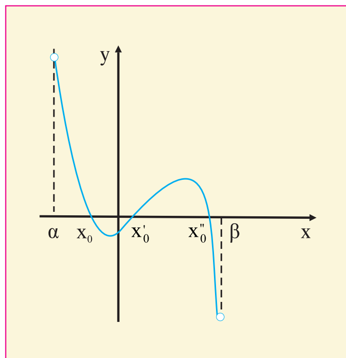


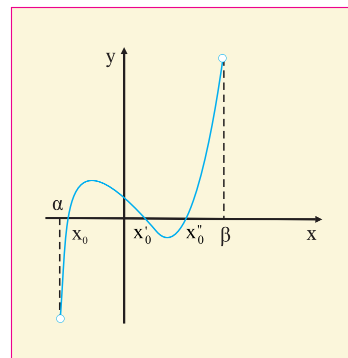
Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο (α,β) για την οποία ισχύει

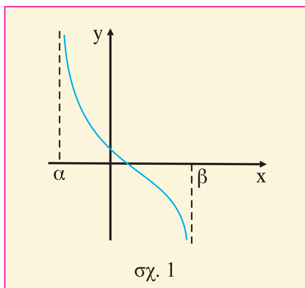
$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot \lim_{x\to\beta^-} f(x)<0$$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

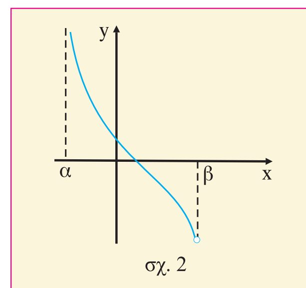




Σχόλιο : Η ύπαρξη του x_0 στο (α, β) με $f(x_0)=0$ ισχύει καί στις περιπτώσεις :



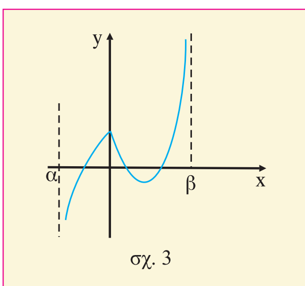
σχ. 1



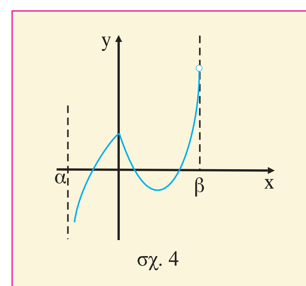
σχ. 2

α. $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=-\infty$ (σχ. 1).

β. $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)<0$ (σχ. 2)



σχ. 3



σχ. 4

γ. $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$ (σχ. 3)

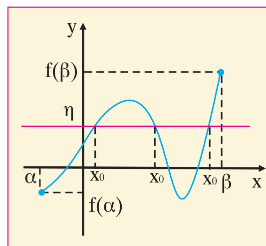
δ. $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)>0$ (σχ. 4)

3. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν ισχύουν ότι:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α), f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = n$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία y = n όπου n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

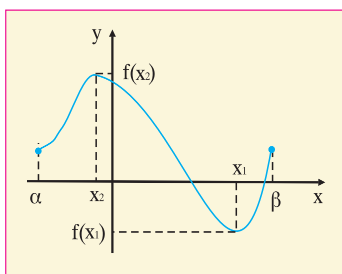
Παρατηρήσεις - Σχόλια

- Αν f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα (Αν η f είναι σταθερή συνεχής ή μη τότε το f(Δ) είναι μονοσύνολο).

4. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε η f παίρνει στο [α,β] μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ οπότε:

$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.



Σχόλια – Παρατηρήσεις

- Αν η f είναι συνεχής μη σταθερή συνάρτηση ορισμένη στο Δ = [α,β] τότε το σύνολο τιμών της είναι το f(Δ) =[m,M] όπου m, η ελάχιστη και M, η μέγιστη τιμή της.
- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$, ενώ αν είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$.

Ευρεση συνόλου τιμών

- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha, \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α,β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A)=\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A)=\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν τέλος η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι : $f(A)=\left[f(\alpha),\ \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ή $f(A)=\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\ f(\beta)\right]$.

  Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$ ή $\left[f(\beta), \lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε **ανοικτό** διάστημα (α,β). Τότε:

α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).
β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος.
γ. Θέτουμε το 1ο μέλος ίσο με μια συνάρτηση.
δ. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση που θεωρήσαμε.

Για την μοναδικότητα της ρίζας εφόσον ζητείται:

Αποδεικνύουμε ή ότι είναι "1 - 1"
ή ότι είναι γνησίως μονότονη
ή εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο

Παράδειγμα 1

Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $\dfrac{x^{2004}+2004}{x-3}+\dfrac{x^{2003}+2003}{x-4}=0$ (1) **έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα** $(3,4)$.

Λύση

Η (1) για $x\neq 4$ και $x\neq 3$ γράφεται : $\left(x^{2004}+2004\right)(x-4)+\left(x^{2003}+2003\right)(x-3)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x^{2004}+2004)(x-4)+(x^{2003}+2003)(x-3)$, για την οποία ισχύουν:

• Είναι συνεχής στο $[3,4]$ και

• $f(3)f(4)=(3^{2004}+2004)(3-4)(4^{2003}+2003)(4-3)=-(3^{2004}+2004)(4^{2003}+2003)<0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $(3,4)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$

Επειδή η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x)=0$ για $x\neq 4$ και $x\neq 3$ θα έχει και αυτή μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3,4)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας μιας εξίσωσης σε **κλειστό** διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα α ,β ,γ , της μεθόδου 1.

Αν στο βήμα δ προκύπτει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει από Θ.Β. ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

• αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$, τότε $f(\alpha)=0$ οπότε $x_0=\alpha$ ή $f(\beta)=0$ οπότε $x_0=\beta$ αν δεν υπάρχουν αντίθετοι περιορισμοί.

Οπότε ,τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^3+3x-\lambda=0$ **έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα** $[0,1]$**, για κάθε** $\lambda\in[0,4]$**.**

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^3+3x-\lambda$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και είναι $f(0)f(1)=-\lambda(4-\lambda)\leq 0$, διότι $0\leq\lambda\leq 4$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $f(0)f(1)<0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $(0,1)\subseteq[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$.

2. Αν $f(0)f(1)=0$, τότε: $f(0)=0$ ή $f(1)=0$, που σημαίνει ότι η ρίζα της f θα είναι το 0 ή το 1.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$, δηλαδή η αρχική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

α. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα $x'x$, τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση που δίνεται.

β. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f,g, τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση h με τύπο: $h(x)=f(x)-g(x)$.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x+2)^{x+2}-3$. Να δειχθεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-1,0)$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επίσης είναι $f(-1)f(0)<0$.

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(-1,0)$.

Παράδειγμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$. Να δειχθεί ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τετμημένη στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x)=x-\sigma\upsilon\nu 2x$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως διαφορά συνεχών και επιπλέον είναι $h(0)h\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0-\sigma\upsilon\nu 2x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\sigma\upsilon\nu 2x_0$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων από μίας ριζών μιας εξίσωσης, σε διάστημα Δ: χωρίζουμε το διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε κάθε ένα απ' αυτά τα διαστήματα.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + 3x^2 = 1$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (- 1, 1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ η οποία είναι συνεχής στο [-1 , 0] ως πολυωνυμική και ισχύει $f(-1)f(0) = -1 < 0$.
Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_1 που ανήκει στο (-1 , 0) τέτοιο ώστε : $f(x_1) = 0$ (1).

Επίσης η f είναι συνεχής και στο διάστημα [0 , 1] ως πολυωνυμική και ισχύει $f(0)f(1) = -3 < 0$.
Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2 που ανήκει στο (0 ,1) τέτοιο ώστε : $f(x_2) = 0$ (2).
Απο τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (- 1 , 1).

Κατηγορία – Μέθοδος 5
Ασκήσεις στις οποίες δίνεται η συνέχεια συνάρτησης , έστω f, σε ανοικτό διάστημα της μορφής (α,β) όπου $\alpha, \beta \in R$, και ισχύει : $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) \cdot \lim_{x \to \beta^-} f(x) < 0$.
Τότε : Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ορίου και διάταξης συμπεραίνουμε ,ότι υπάρχουν δύο τιμές κ και λ στις περιοχές των α,β αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει f(κ)· f(λ)< 0 και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\kappa,\lambda] \subset (\alpha,\beta)$.

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = xe^x + \ln x - 2$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1).

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$ και ισχύει : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (xe^x + \ln x - 2) = -\infty$

Συνεπώς υπάρχει $k \in (0,1) : f(k) < 0$ και επίσης είναι $f(1) = 1e^1 + \ln 1 - 2 = e - 2 > 0$. Η f είναι συνεχής στο [k , 1], άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 στο (k , 1) (άρα και στο (0,1)) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6
Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουμε ασκήσεις που αφορούν το **πρόσημο** συνεχούς συνάρτησης υπαγορεύεται από τις επόμενες δύο προτάσεις
Πρόταση 1
Αν για την συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα Δ είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f διατηρεί το πρόσημο των τιμών της στο Δ.

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο. Τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \Delta$ με $\kappa < \lambda$ ώστε $f(\kappa)f(\lambda) < 0$. Από το Θ. Bolzano η f θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (κ, λ) που είναι άτοπο αφού $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Πρόταση 2

Το πρόσημο συνεχούς συνάρτησης μεταξύ δύο διαδοχικών της ριζών είναι σταθερό.
Η απόδειξη είναι όμοια με την πρόταση 1.

Παράδειγμα 7

Αν η f είναι συνεχής στο R με $f(2003) = -2004$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{[f(\alpha) - 2005]x^5 + 6x^4 - 3x + 4}{f(\alpha)x^3 + x^2 - 9} = +\infty$

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{[f(\alpha) - 2005]x^5 + 6x^4 - 3x + 4}{f(\alpha)x^3 + x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(\alpha) - 2005}{f(\alpha)} x^2 = +\infty$. Διότι αφού η f είναι συνεχής στο R και $f(2003) = -20004 < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$ άρα $f(\alpha) < 0$ και $f(\alpha) - 2005 < 0$ οπότε ο λόγος $\dfrac{f(\alpha) - 2005}{f(\alpha)} > 0$.

Παράδειγμα 8

Για την f που είναι συνεχής στο R γνωρίζουμε ότι έχει τρεις ακριβώς ρίζες -1, 2, 5 και επίσης $f(-2) = 4$, $f(0) = 3$ **και** $f(4) = -1$, $f(6) = 3$.

Να βρεθεί το πρόσημο της f

Λύση

Το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα

x	-∞		-1		2		5		+∞
f(x)		+	0	+	0	-	0	+	
		f(-2) = 4		f(0) = 3		f(4) = -1		f(6) = 3	

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη x_0 που πληρεί μια συνθήκη.

Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση h η οποία υποδηλώνεται από τη ζητούμενη συνθήκη σε κατάλληλο κλειστό διάστημα. Η ισχύς του Θ.Β. για την h εξασφαλίζει την ύπαρξη του x_0 που αναζητάμε.

Παράδειγμα 9

Έστω οι συναρτήσεις f, g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\neq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-\alpha}+\dfrac{1}{\xi-\beta}$ (1)

Λύση

Από την (1) έχουμε με απαλοιφή:

$f(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)=g(\xi)(\xi-\beta)+g(\xi)(\xi-\alpha)$ (2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)(x-\alpha)(x-\beta)-g(x)(x-\beta)-g(x)(x-\alpha)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ και των $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ που είναι επίσης συνεχείς.
- $h(\alpha)=-g(\alpha)(\alpha-\beta)$

  $h(\beta)=-g(\beta)(\beta-\alpha)=g(\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

  Άρα $h(\alpha)h(\beta)=-g(\alpha)g(\beta)(\alpha-\beta)^2<0$ διότι $(\alpha-\beta)^2>0$ και $g(\alpha)$, $g(\beta)$ είναι ομόσημοι αφού g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\neq 0$ οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο.

  Από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$ άρα και $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-\alpha}+\dfrac{1}{\xi-\beta}$ αφού οι (1), (2) είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 10

Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to[-\alpha,\alpha]$ συνεχής.

Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε $f(x_0)=x_0$

Λύση

Έστω $h(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[-\alpha,\alpha]$. Η h είναι συνεχής.

Ισχύουν επίσης: $h(-\alpha)=f(-\alpha)+\alpha$ (1)

$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$ (2)

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[-\alpha,\alpha]$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει $-\alpha\le f(x)\le\alpha$ οπότε

$$\begin{cases}-\alpha\le f(\alpha)\le\alpha\\ -\alpha\le f(-\alpha)\le\alpha\end{cases}$$

Από αυτές και τις (1), (2) φαίνεται ότι $h(-\alpha)\ge 0$ και $h(\alpha)\le 0$. Οπότε $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)\le 0$.

(α) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)<0$, από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $h(x_0)=0$.

(β) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)=0$ τότε $h(-\alpha)=0$ ή $h(\alpha)=0$, οπότε $x_0=-\alpha$ ή $x_0=\alpha$

Από (α), (β) λοιπόν αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Παράδειγμα 11

Έστω f συνεχής στο $[1,2]$ με $f(1)=f(2)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ ώστε $f(\theta)=f\left(\theta+\frac{1}{2}\right)$.

Λύση

Πρέπει $1\le\theta+\frac{1}{2}\le 2$ οπότε ο θ είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{3}{2}$.

Έστω $g:\left[1,\frac{3}{2}\right]\to R$ με $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ και ισχύει:

$g(1)=f(1)-f\left(\frac{3}{2}\right)$ και $g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)-f(2)=f\left(\frac{3}{2}\right)-f(1)$ (υπόθεση).

Άρα $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)=-\left[f\left(\frac{3}{2}\right)-f(1)\right]^2\le 0$.

(α) Αν $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)<0$ τότε από το Θ. Bolzano υπάρχει $\theta\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ώστε $g(\theta)=0$.

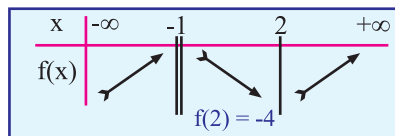
(β) Αν $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$ άρα το θ είναι το 1 ή το $\frac{3}{2}$.

Από (α), (β) φαίνεται ότι υπάρχει $\theta\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ με $g(\theta)=0\Leftrightarrow f(\theta)=f\left(\theta+\frac{1}{2}\right)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Ασκήσεις που ζητείται η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης που είναι συνεχής και γνησίως μονότονη κατά διαστήματα. Τότε:
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών στα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη. Η ένωσή τους μας δίνει το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Παράδειγμα 12



Για την συνάρτηση f γνωρίζουμε τον διπλανό πίνακα και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$

$f(2)=-4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=10$. **Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.**

Λύση

• Για τα $x \in (-\infty,-1)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_1 = (0,+\infty)$.

• Για τα $x \in (-1,2)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_2 = (-4,+\infty)$.

• Για τα $x \in [2,+\infty)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_3 = [-4,10)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = [-4,+\infty)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9
Εφαρμογές των θεωρημάτων
- Ενδιάμεσης τιμής
- Μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Παράδειγμα 13

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in [\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}$.

Λύση

Η f ως συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει ελάχιστη τιμή μ και μέγιστη M.

Άρα
$$\left.\begin{aligned} \mu &\le f(x_1) \le M \\ \mu &\le f(x_2) \le M \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mu &\le f(x_\nu) \le M \end{aligned}\right\}$$
Προσθέτουμε και έχουμε: $\nu\mu \le f(x_1)+\dots+f(x_\nu) \le \nu M$
$$\mu \le \frac{f(x_1)+\dots+f(x_\nu)}{\nu} \le M$$

Αφού ο αριθμός $\dfrac{f(x_1)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}$ είναι μεταξύ ελάχιστης (μ) και μέγιστης (M) τιμής συνεχούς συνάρτησης θα ανήκει στο σύνολο τιμών της και συνεπώς θα υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ ώστε
$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}.$$

Παρατήρηση: Αν η f σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ τότε η ζητούμενη προς απόδειξη σχέση ισχύει για κάθε $\xi \in [\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα 14

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{\mu f(\alpha)+\nu f(\beta)}{\mu+\nu}$ με $\mu,\nu > 0$.

Λύση

Η f ως συνεχής στο [α,β] έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή , έστω m και M αντίστοιχα.

Τότε : $\begin{cases} m \le f(\alpha) \le M \\ m \le f(\beta) \le M \end{cases}$ και επειδή $\mu, \nu > 0$ $\begin{cases} \mu m \le \mu f(\alpha) \le \mu M & (1) \\ \nu m \le \nu f(\beta) \le \nu M & (2) \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$(\mu+\nu)m \le \mu f(\alpha)+\nu f(\beta) \le (\mu+\nu)M \Leftrightarrow m \le \frac{\mu f(\alpha)+\nu f(\beta)}{\mu+\nu} \le M \quad (3)$$

- Αν $\mathbf{m < M}$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει

  $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \dfrac{\mu f(\alpha)+\nu f(\beta)}{\mu+\nu}$.
- Αν $\mathbf{m = M}$ τότε η f είναι σταθερή και το ξ μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος [α,β].

Παράδειγμα 15

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + e^x$ και πεδίο ορισμού το (0,1].

i. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ii. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο (0,1] διότι είναι άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] διότι για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$\ln x_1 < \ln x_2$ και $e^{x_1} < e^{x_2}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + e^{x_1} < \ln x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,1].

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x + e^x) = -\infty$ και $f(1) = \ln 1 + e^1 = 0 + e = e$

το σύνολο τιμών της f είναι : $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, e]$.

ii. Το 0 ανήκει στο πεδίο τιμών της f. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει : $f(x_0) = 0$ και επειδή $x_0 \ne 1$ έπεται ότι $x_0 \in (0,1)$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x+1 & , -2 \le x \le 0 \\ x^2-3x+1 & , \quad 0 < x \le 1 \end{cases} \quad \textbf{στο διάστημα [-2,1]}$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2,0)\cup(0,1]$ σαν πολυωνυμική.

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, η είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Άρα είναι συνεχής στο $[-2,1]$. Ισχύει $f(-2)=9$ και $f(1)=-1$ οπότε $f(-2)\cdot f(1)=-9<0$.
Άρα εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στο διάστημα [-2,1].

Άσκηση 2

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $3συνx-x-2=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Έστω $f(x)=3συνx-x-2$ ορισμένη στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής στα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν :

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=\left(\frac{\pi-4}{2}\right)\cdot 1<0$ ενώ $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left(\frac{-\pi-4}{2}\right)<0$.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Τελικά υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση 3

Έστω $f:[α,β]\to R$ με $α\le f(x)\le β$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y\in[α,β]$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|\le κ|x-y|$, με $κ\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[α,β]$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in[α,β]$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

Λύση

i. Για $y=x_0$ τυχαίο έχουμε:

$$|f(x)-f(x_0)|\le κ|x-x_0| \Leftrightarrow -κ|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le κ|x-x_0|.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in[α,β]$ δηλαδή συνεχής στο $[α,β]$

ii. Έστω $g(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[α,β]$ και συνεχής.

Επειδή $g(α)\cdot g(β)=(f(α)-α)\cdot(f(β)-β)\le 0$ (από την υπόθεση), σύμφωνα με το Θ. Bolzano

θα υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Η μοναδικότητα του x_0 θα εξασφαλιστεί από την μονοτονία της g.

Είναι $\lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1$ (1)

Από τη δοθείσα είναι:

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \le \kappa \Leftrightarrow -\kappa \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \kappa \Leftrightarrow -\kappa-1 \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1 \le \kappa - 1$$

Όμως $\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa-1<0$ άρα $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$ δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Σχόλιο

Μια άλλη απόδειξη της μοναδικότητας είναι η εξής:

Έστω ότι υπάρχουν δύο αριθμοί ρ_1, ρ_2 με την ιδιότητα $f(\rho_1)=\rho_1$ και $f(\rho_2)=\rho_2$.

Τότε η σχέση για $x=\rho_1$ και $y=\rho_2$ γίνεται:

$$|f(\rho_1)-f(\rho_2)| \le \kappa|\rho_1-\rho_2|$$

$$|\rho_1-\rho_2| \le \kappa|\rho_1-\rho_2|$$

$1 \le \kappa$ που είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

Άσκηση 4

Έστω $f(x)=(x^2-3x+2)\cdot h(x)$ για κάθε $x \in R$ όπου h είναι συνεχής συνάρτηση στο R. Αν οι αριθμοί 1, 2 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να αποδειχθεί ότι $h(1)\cdot h(2) \ge 0$.

Λύση

Έστω $h(1)\cdot h(2)<0$. Επειδή η h είναι και συνεχής συνάρτηση h στο $[1,2]$ και πληρεί τις προυποθέσεις του Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$.

Τότε όμως $f(x_0)=(x_0^2-3x_0+2)\cdot h(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=0$. Άρα το $x_0 \in (1,2)$ είναι ρίζα της f, άτοπο αφού η f έχει τους 1, 2 διαδοχικές ρίζες. Οπότε δεν ισχύει η $h(1)\cdot h(2)<0$ και συνεπώς ισχύει $h(1)\cdot h(2) \ge 0$.

Άσκηση 5

Έστω συναρτήσεις f και g ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [α,β] με σύνολο τιμών το [α,β] και α διάφορο του μηδενός.

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β], να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\beta f(\xi)+\alpha g(\xi)=\xi(\alpha+\beta)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\beta f(x)+\alpha g(x)-x(\alpha+\beta)$, που είναι συνεχής στο [α,β] ως άθροισμα συνεχών.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] και το σύνολο τιμών της είναι το [α,β] θα είναι

$f(\alpha)=\alpha \quad$ και $\quad f(\beta)=\beta \quad (1).$

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β] και το σύνολο τιμών της είναι το [α,β] θα είναι

$g(\alpha)=\beta \quad$ και $\quad g(\beta)=\alpha \quad (2).$

Είναι: $h(\alpha)=\beta f(\alpha)+\alpha g(\alpha)-\alpha(\alpha+\beta)\overset{(1),(2)}{=}\beta\alpha+\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)=\alpha(\beta-\alpha)$

$$h(\beta)=\beta f(\beta)+\alpha g(\beta)-\beta(\alpha+\beta)\overset{(1),(2)}{=}\beta^2+\alpha^2-\beta(\alpha+\beta)=-\alpha(\beta-\alpha)$$

Οπότε

$$h(\alpha)h(\beta)=\alpha(\beta-\alpha)\left[-\alpha(\beta-\alpha)\right]=-\alpha^2(\beta-\alpha)^2<0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$h(\xi)=0 \Leftrightarrow \beta f(\xi)+\alpha g(\xi)=\xi(\alpha+\beta)$

Άσκηση 6

Έστω $f:R\to R$ συνεχής με $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$ και $\alpha+\beta<-1$ με $\beta>0$.

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο R.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο R. Ισχύουν : $f(0)=\beta>0, \quad f(1)=1+\alpha+\beta<0,$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

Από το πρώτο όριο, υπάρχει $x_1>1$ ώστε $f(x_1)>0$ και από το δεύτερο όριο υπάρχει $x_2<0$ ώστε $f(x_2)<0$. Στα διαστήματα $[x_2,0]$, $[0,1]$, $[1,x_1]$, η f πληρεί τις προϋποθέσεις του Bolzano άρα υπάρχουν τρεις τουλάχιστον ρίζες, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Επειδή όμως η f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες. Τελικά οι ρίζες είναι ακριβώς τρεις.

Άσκηση 7

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+\lambda x-2=0$ με $\lambda>0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

Λύση

Έστω $f(x)=x^3+\lambda x-2$ ορισμένη στο $[0,2]$ **(εδώ δεν αναφέρεται το διάστημα, οπότε το βρίσκουμε κάνοντας δοκιμές).**

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)\cdot f(2)=-2\cdot(2\lambda+6)<0$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επειδή όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, η ρίζα είναι μοναδική.

Σημείωση : Για την μονοτονία της f έχουμε : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1\cdot x_2+x_1^2+\lambda>0$

(τριώνυμο με αρνητική Διακρίνουσα). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\kappa}-2x+1=0$ με $\kappa>1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

Λύση

Έστω $P(x)=x^{2\kappa}-2x+1$. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο και έχουμε:

$$P(x)=x^{2\kappa}-2x+1=x^{2\kappa}-x-x+1=x\left(x^{2\kappa-1}-1\right)-(x-1)=$$

$$=x(x-1)\left(x^{2\kappa-2}+x^{2\kappa-3}+\ldots+x+1\right)-(x-1)=$$

$$=(x-1)\left(x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+\ldots+x^2+x-1\right) \qquad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση π με $\pi(x)=x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+\ldots+x-1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$

με $\pi(0)=-1$ και $\pi(1)=\underbrace{1+.....+1}_{2\kappa-1}-1=2\kappa-2=2(\kappa-1)>0$ (από την υπόθεση).

Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $\pi(x_0)=0$. Άρα η (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Άσκηση 9

Έστω f συνεχής στο [α,β] με α < β και $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$.

Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot f(\xi)=f(x_1)+2f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή m, M αντίστοιχα.

Δηλαδή: $m\le f(x_1)\le M$, $2m\le 2f(x_2)\le 2M$, $3m\le 3f(x_3)\le 3M$, ..., $\nu m\le \nu f(x_\nu)\le \nu M$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισώσεων έχουμε:

$$m\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\le f(x_1)+2f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)\le M\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\Leftrightarrow$$

$$m\le 2\cdot\frac{f(x_1)+2f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)}{\nu(\nu+1)}\le M$$

Από το Θ. ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ξ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ώστε

$$f(\xi)=2\cdot\frac{f(x_1)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)}{\nu(\nu+1)}\Leftrightarrow\frac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot f(\xi)=f(x_1)+2\cdot f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)$$

Άσκηση 10

Έστω $\kappa,\lambda,\mu\in R$ με $\kappa\neq 0$ και $\mu^2+\mu\lambda+\kappa\mu<0$. Να δειχθεί ότι $\lambda^2>4\kappa\mu$.

Λύση

Έστω $f(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$ με $\kappa\neq 0$ ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $f(0)\cdot f(1)=\mu(\kappa+\lambda+\mu)=\kappa\mu+\lambda\mu+\mu^2<0$.

Άρα θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 της f στο $(0,1)$. Οπότε $\kappa x_0^2+\lambda x_0+\mu=0$.

Άρα $\Delta\geq 0\Leftrightarrow\lambda^2-4\kappa\mu\geq 0\Leftrightarrow\lambda^2\geq 4\kappa\mu$ (1)

Αν ήταν $\Delta=0$ τότε η $f(x)=0$ θα είχε διπλή ρίζα άρα $f(x)=\kappa\left(x+\frac{\lambda}{2\kappa}\right)^2$

Αλλά τότε $f(0)\cdot f(1)=\frac{1}{16}\cdot\frac{\lambda^2}{\kappa^2}(2\kappa+\lambda)^2\geq 0$, άτοπο. Άρα από την (1) ισχύει $\lambda^2>4\kappa\mu$.

Άσκηση 11

Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση με $f(3)+f(5)+f(7)=0$ (1).

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα .

Λύση

- Αν $f(3)=0$ ή $f(5)=0$ ή $f(7)=0$ τότε είναι προφανές το ζητούμενο.
- Αν $f(3)\cdot f(5)\cdot f(7)\neq 0$, δηλαδή κανένας απο τους όρους του γινομένου δεν είναι 0 , προκύπτει απο την (1) ότι δύο τουλάχιστον απο τους $f(3),f(5),f(7)$ είναι ετερόσημοι.

  Έτσι αν $f(3)\cdot f(5)<0$ προκύπτει απο το θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (3 , 5).
- Ομοίως αν $f(5)\cdot f(7)<0$ ή $f(3)\cdot f(7)<0$, προκύπτει πάλι απο το θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διαστήμα (5 , 7) ή (3 , 7) αντίστοιχα.

Άσκηση 12

Έστω $f:[0,10]\to R$ με $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της f και να ορίσετε την f^{-1} .

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$ (αποδεικνύεται με τον λόγο μεταβολής).

Άρα $f(A)=[f(0),\ f(10)]=\left[0,\frac{100}{101}\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1, οπότε ορίζεται η $f^{-1}:\left[0,\frac{100}{101}\right]\to R$. Για την εύρεση του τύπου της f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ ως προς x . Έχουμε $f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ με $y\in[0,1)$.

Άσκηση 13

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to Z$ συνεχής με $\alpha<\beta,\quad \alpha,\beta\in R$. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή άρα θα υπάρχουν δύο αριθμοί $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ με κ<λ ώστε $f(\kappa)\neq f(\lambda)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$, από το Θ. ενδιάμεσων τιμών η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\kappa),\ f(\lambda)$ οι οποίοι είναι ακέραιοι λόγω του πεδίου τιμών.
Μεταξύ όμως δύο ακεραίων αριθμών υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι. Άρα θα υπάρχει $x_0\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο ώστε το $f(x_0)$ να μην είναι ακέραιος. Αυτό είναι άτοπο γιατί το σύνολο τιμών είναι το Z.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x-1 & ,\ x\leq 1\\ x+1 & ,\ x>1\end{cases}$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

ii. Να δειχθεί ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)=0$ στο $(0,2)$.

(**Υπ.: i.** Εξετάστε την συνέχεια στο $x_0=1$ και δείξτε ότι είναι συνεχής στο R,
ii. Εφαρμόστε το Θ.Β. στο $[0,2]$)

2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0,8] για την οποία ισχύουν :

$f(0)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=2$, $f(6)=-4$, $f(8)=1$

i. Να βρείτε πόσες τουλάχιστον φορές η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα x΄x στο διάστημα (0 , 8).

ii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα [0,2] και [4,6] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [2,4] και [6,8] να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x)=0$.

(**Υπ.: i.** Εφαρμόστε το Θ.Β. στα $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[6,8]$. **Απ.: i.** 4 τουλάχιστον φορές **ii.** Ακριβώς 4)

3. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)\neq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

(**Υπ.:**Βλέπε Μέθοδος 1. Εφαρμόστε το Θ. Β. στην συνάρτηση $h(x)=f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))$ στο $[\alpha,\beta]$)

4. Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα .

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+.....+\frac{1}{x-\nu}=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2)$, $(2,3)$,.....$(\nu-1,\ \nu)$.

(**Υπ.:**Κάνετε απαλοιφή παρανομαστών και εφαρμόστε το Θ.Β. σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[2,3]$, ..., $[\nu-1,\nu]$)

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+(\kappa+\lambda-5)x+1=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$, εάν $\kappa+\lambda=1$.

(**Υπ.:**Εφαρμόστε Θ.Β. στο $[0,1]$ και δείξτε ότι $f(0)f(1)<0$ με τη βοήθεια της σχέσης $\kappa+\lambda=1$)

7. Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\rightarrow R$ συνεχής με $x^2+f^2(x)=\alpha^2$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$.

(**Υπ.:**Παρατηρήστε ότι $f(x)=0$ όταν $x=\pm\alpha$: Υποθέστε ότι δεν διατηρεί πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$ και καταλήξτε σε ***άτοπο***)

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$ παίρνει την τιμή -4 για κάποιο $x\in(-2,-1)$.

(**Υπ.:**Παρατηρήστε ότι $f(-2)<-4<f(-1)$ και εφαρμόστε Θ.Ε.Τ.)

9. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο μόνο ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

(**Υπ.:**Δείξτε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ οπότε αφού είναι 3[ου] βαθμού θα έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(0,2)$)

10. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\cdot\ell n\sqrt{x}+x^2\cdot\ell nx=2$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(1,e)$.

(**Υπ.:**Εφαρμόστε Θ.Β. στο $[1,e]$ για την $h(x)=x\ell n\sqrt{x}+x^2\ell nx-2$)

11. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β] με : $\alpha\leq f(x)\leq\beta$ και $\alpha\leq g(x)\leq\beta$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $(fog)(x_0)+(gof)(x_0)=2x_0$.

(**Υπ.:** Θεωρήστε την $h(x)=fog(x)+gof(x)-2x=fog(x)-x+gof(x)-x$ και εφαρμόστε το Θ. Bolzano στο $[\alpha,\beta]$. Προσέξτε τις περιπτώσεις $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$)

12. Έστω f, g συνεχείς στο R με $f(x)\le 0\le g(x)$ και έστω ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma\in R$ ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

(**Υπ.:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)-x$ και εργαστείτε όπως στη μέθοδο)

13. Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(\beta,\alpha)$. Αν ισχύει για κάθε $x\in R$ ότι $\alpha<g(x)<\beta$, να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο.

(**Υπ.:** Παρατηρήστε $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Αρκεί να δείξετε ότι $f(x_0)=g(x_0)$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Bolzano στο $[\alpha,\beta]$)

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-3)\ell nx-x+2$. Να εξεταστεί αν ο αριθμός 0,946506500 είναι τιμή της συνάρτησης.

(**Υπ.:** Θεώρημα Bolzano σε διάστημα $[3,\theta]$. Αρκεί $f(\theta)>0$ (π.χ. $\theta=e^2$))

15. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\alpha]$ με $f(0)=f(\alpha)$.

i. Να δειχθεί ότι η $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$

(**Υπ.: i.** Αν $x\in\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$ τότε $x+\frac{\alpha}{2}\in\left[\frac{\alpha}{2},\alpha\right]$ άρα $h(x)$ καλά ορισμένη και συνεχής

ii. Εφαρμόστε το Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$)

16. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και $0\le g(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ ώστε $f(g(\xi))+g(\xi)=f(\xi)+\xi$.

(**Υπ.:** Θεωρήστε την $h(x)=f(g(x))+g(x)-f(x)-x$ και εφαρμόστε το Θ. Bolzano στο $[0,1]$)

17. Έστω η συνάρτηση f περιττή και συνεχής στο $[-\pi,\pi]$. Να δείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)=0$ στο $[-\pi,\pi]$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ. Bolzano στο $[-\pi,\pi]$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αφού f περιττή $f(-x)=-f(x)$)

18. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$. Να δείξετε ότι αν $f(1)>0$ και για κάθε $x\in(-2,2)$ ισχύει $2x^2+5f^2(x)=8$ τότε για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $f(x)>0$.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$ και αφού $f(1)>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-3,3)$.)

19. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=2\eta\mu x+1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

$\left(\textbf{Απ:}\ f\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)=[1,2)\right)$

20. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και $f(0)=1$, $f(1)=2$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

(**Υπ.:** Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ τότε $f(0)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow 1<f(x)<2$. Εφαρμόστε Θ.Ε.Τ. αφού δείξετε ότι $1<\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}<2$)

21. Αν η f συνεχής στο $[1,3]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,3]$ τέτοιο ώστε:

$f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Ε.Τ. στο $[1,3]$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αφού η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M)

22. Η ανάβαση από μια ομάδα προσκόπων στην κορυφή ενός βουνού κ από πόλη Π που βρίσκεται στους πρόποδες του βουνού γίνεται μια μέρα από τις 8:00 έως τις 16:00. Η κατάβαση γίνεται την άλλη μέρα τις ίδιες ώρες και από το ίδιο μονοπάτι.

Να δείξετε ότι υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 που η ομάδα βρίσκεται στο ίδιο σημείο κατά την ανάβαση και κατά την κατάβαση.

(**Υπ.:** Θεωρήστε $s_1(t)$, $s_2(t)$ τις συναρτήσεις θέσης κατά την ανάβαση και την κατάβαση αντίστοιχα και εφαρμόστε Θ. Bolzano στην συνάρτηση $h(t)=s_1(t)-s_2(t)$ στο $[8,16]$. Λάβετε υπ΄όψιν σας ότι οι συναρτήσεις θέσεις είναι συνεχείς εξ' ορισμού. Λάβετε υπ' όψιν σας επίσης ότι $s_1(16)=s_2(8)$ και $s_1(8)=s_2(16)$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)+f(\beta)=\alpha+\beta$.

Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f(x_0)-\beta}{x_0-\alpha}=\dfrac{f(x_0)-\alpha}{x_0-\beta}$.

9ο μάθημα

Ορισμός παραγώγου
Εξίσωση εφαπτομένης

10ο μάθημα

Παράγωγος συνάρτησης
Κανόνες παραγώγισης
Εξίσωση εφαπτομένης

12ο μάθημα

Θεωρήματα
Rolle - Μέσης Τιμής
Συνέπειες του θεωρήματος
Μέσης Τιμής

11ο μάθημα

Ρυθμός μεταβολής

13ο μάθημα

Μονοτονία
Ακρότατα συνάρτησης

2ο Κεφάλαιο

14ο μάθημα

Κυρτότητα
Σημεία καμπής
συνάρτησης

17ο μάθημα

Μελέτη και γραφική
παράσταση συνάρτησης

15ο μάθημα

Κανόνες
De l’ Hospital

16ο μάθημα

Ασύμπτωτες



Ορισμός παραγώγου
Εξίσωση εφαπτομένης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Ορισμός παράγωγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Αν θέσουμε $x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$ τότε έχουμε: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

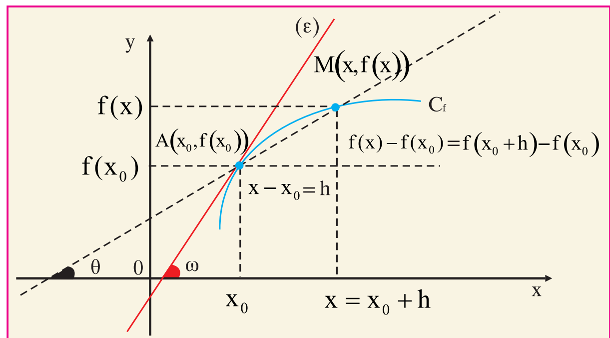
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,αν και μόνο αν ,υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0.**

ΙΙ. Εξίσωση εφαπτομένης

Εάν $h\neq 0$,τότε δύο διακεκριμένα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $M(x_0+h,f(x_0+h))$ καθορίζουν μια ευθεία (τέμνουσα) της C_f με κλίση :

$$\lambda=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\varepsilon\varphi\theta\ .$$



Αν θεωρήσουμε το Α σταθερό και το Μ κινούμενο πάνω στη C_f,όπως δείχνει το σχήμα η εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι το όριο των τεμνουσών ΑΜ καθώς το Μ πλησιάζει το Α ή ισοδύναμα καθώς το h τείνει στο 0 ή ισοδύναμα καθώς το x τείνει στο x_0 .
Επομένως , είναι λογικό να ορίσουμε ως **κλίση της εφαπτομένης** το όριο του προηγούμενου πηλίκου , δηλαδή : $εφω = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Συνοψίζοντας ,έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο Α την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.
Δηλαδή , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0
($λ = f'(x_0) = εφω$),
οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Προσοχή: **i.** Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως εύκολα διαπιστώνουμε για την συνάρτηση $f(x)=|x|$ και $x_0 = 0$.

ii. Αν μια συνάρτηση **δεν** είναι συνεχής σ'ένα σημείο x_0 τότε αποκλείεται να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1
Εύρεση του παραγώγου αριθμού της f στο x_0 με χρήση του ορισμού
Έλεγχος για το αν είναι παραγωγίσιμη ή όχι μία συνάρτηση σε σημείο x_0 με χρήση του ορισμού.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο (αν υπάρχει) των συναρτήσεων :

α. $f(x) = 1 + ημ^2x$ στο $x_0 = 0$ **β.** $f(x) = 2\sqrt{x-3} + 5x + 1$ στο $x_0 = 3$

Λύση

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+ημ^2x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot ημx\right) = 1\cdot 0 = 0 = f'(0)$

β. Η f έχει πεδίο ορισμού $[3, +\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2\sqrt{x-3}+5x+1-16}{x-3} =$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2\sqrt{x-3}+5x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3}+\frac{5(x-3)}{(x-3)}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3}+5\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}+5\right)=+\infty.$$ Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$ (από δεξιά) η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2}$.

Λύση

Πρέπει $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-2,+\infty)$.

Είναι: $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{x+2}-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=+\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$.

Παράδειγμα 3

Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy,\ \ x,y\in R$.
Να βρείτε την $f'(3)$.

Λύση

Είναι $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)+f(h)+15h-f(3)}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)+15h}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+15\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+15=2+15=17=f'(3)$$

Παράδειγμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=1$ για την οποία ισχύει:

$$x^2f^3(x)+2f(x)=x^2-1, \text{ για κάθε } x\in R$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε: $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (1)

Με $x=1$ στη σχέση που δόθηκε, παίρνουμε:

$$1^2\cdot f^3(1)+2f(1)=1^2-1\Leftrightarrow f^3(1)+2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1)+2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} f(1)=0 \\ \text{ή} \\ f^2(1)+2=0\ \ (\text{αδύνατο}) \end{array}\right\}\Leftrightarrow f(1)=0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. Η δοσμένη σχέση γίνεται:

$x^2f^3(x)+2f(x)=x^2-1 \Leftrightarrow x^2f^2(x)f(x)+2f(x)=x^2-1$

(Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός).

Για κάθε $x\neq 1$ είναι:

$$\frac{x^2f^2(x)\cdot f(x)}{x-1}+\frac{2f(x)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2f^2(x)\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+2\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2f^2(x)+2\right)\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x+1}{x^2f^2(x)+2}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2f^2(x)+2}=\dfrac{2}{1\cdot 0+2}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα $f'(1)=1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου όπου το x_0 είναι σημείο που εκατέρωθεν αυτού αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης ζητείται συχνά να βρούμε παραμέτρους ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

α. Απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο x_0 και η απαίτηση αυτή θα δώσει μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων.

β. Βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους:

(από δεξιά) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (και από αριστερά) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,
αξιοποιώντας τη σχέση από τη συνέχεια. Εξισώνουμε τα δύο όρια και έχουμε ακόμη μία σχέση που με την προηγούμενη δημιουργείται σύστημα το οποίο επιλύουμε.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta+5, & x<3\\ \alpha x^2+\beta x, & x\geq 3\end{cases}$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ είναι και συνεχής στη θέση αυτή δηλαδή ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta+5)=6\alpha+\beta+5$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\alpha x^2+\beta x\right)=9\alpha+3\beta$

και

$f(3)=9\alpha+3\beta$

οπότε ισχύει

$9\alpha+3\beta=6\alpha+\beta+5 \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=5 \Leftrightarrow 2\beta=5-3\alpha \ (1)$

Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους στο 3 και είναι:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+\beta+5-(9\alpha+3\beta)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+\beta+5-9\alpha-3\beta}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+5-9\alpha-2\beta}{x-3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+5-9\alpha-5+3\alpha}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x-6\alpha}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha(x-3)}{(x-3)}=2\alpha$$

και

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2+\beta x-(9\alpha+3\beta)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2+\beta x-9\alpha-3\beta}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2-9\alpha+\beta x-3\beta}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha(x^2-9)+\beta(x-3)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha(x-3)(x+3)+\beta(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)\left[\alpha(x+3)+\beta\right]}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\left[\alpha(x+3)+\beta\right]=6\alpha+\beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 αν και μόνον αν : $2\alpha=6\alpha+\beta \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=0 \quad (2)$

Για να προσδιορίσουμε τα α,β λύνουμε το σύστημα των (1) και (2):

$$\left.\begin{aligned}3\alpha+2\beta=5\\ 4\alpha+\beta=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-1 \ \text{ και } \ \beta=4$$

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta, & x\le 2\\ x^3+\gamma x, & x>2\end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η C_f να έχει στο σημείο $A(2,f(2))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=-8x+10$.

Λύση

Για να ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ οπότε πρέπει να είναι και συνεχής στη θέση αυτή.

Είναι
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}f(x)&=\lim_{x\to 2^-}(\alpha x^2+\beta)=4\alpha+\beta\\ \lim_{x\to 2^+}f(x)&=\lim_{x\to 2^+}(x^3+\gamma x)=8+2\gamma\\ f(2)&=4\alpha+\beta\end{aligned}\right\}$$

Πρέπει $4\alpha+\beta=8+2\gamma \Leftrightarrow$

$4\alpha=8-\beta+2\gamma \quad (1)$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\alpha x^2+\beta-(4\alpha+\beta)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\alpha x^2+\beta-4\alpha-\beta}{x-2}=$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4\alpha$$

και

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-(4\alpha+\beta)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-4\alpha-\beta}{x-2}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-8+\beta-2\gamma-\beta}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8+\gamma x-2\gamma}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)+\gamma(x-2)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4+\gamma)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2x+4+\gamma)=4+4+4+\gamma=12+\gamma$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο 3, αν και μόνον αν , $4\alpha=12+\gamma$.

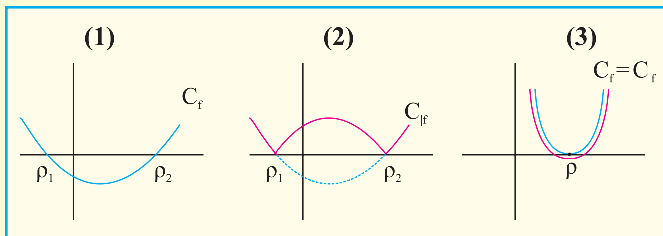
Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y=-8x+10$ πρέπει :

$$f'(2)=-8 \Leftrightarrow 4\alpha=12+\gamma=-8 \Leftrightarrow \left.\begin{cases}4\alpha=-8\\ 12+\gamma=-8\end{cases}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-2 \text{ και } \gamma=-20$$

Τότε απο την (1) παίρνουμε :

$$4(-2)=8-\beta+2\cdot(-20)\Leftrightarrow -8=8-\beta-40\Leftrightarrow \beta=8-40+8\Leftrightarrow \beta=-24.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3



Παράγωγος και απόλυτη τιμή

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και $|f|$ διαπιστώνουμε ότι στα σημεία στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι ρίζες της και η απόλυτη τιμή της f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα αν $f(\alpha)>0$ τότε $f'(\alpha)=|f|'(\alpha)$ ενώ αν $f(\alpha)<0$ τότε $f'(\alpha)=-|f|'(\alpha)$.

Στο σχήμα (2) φαίνεται ότι στις ρίζες ρ_1, ρ_2 της $f(x)=0$ η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη ενώ στο σχήμα (3) που η ρίζα ρ είναι διπλή η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη.

Χρήσιμη είναι η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο α και $f(\alpha) \neq 0$, να δείξετε ότι η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

Λύση

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(|f(x)|-|f(\alpha)|)(|f(x)|+|f(\alpha)|)}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|^2-|f(\alpha)|^2}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)} =$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(f(x)-f(\alpha))}{x-\alpha}\frac{(f(x)+f(\alpha))}{|f(x)|+|f(\alpha)|} =$$

$$f'(\alpha)\frac{2f(\alpha)}{2|f(\alpha)|} = \begin{cases} f'(\alpha) & \text{αν } f(\alpha)>0 \\ -f'(\alpha) & \text{αν } f(\alpha)<0 \end{cases}$$. Άρα η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

Παράδειγμα 7

Έστω $f(x) = |x-3|g(x)$ όπου g συνεχής συνάρτηση στο R με $g(3) \neq 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)g(x)}{x-3} = g(3)$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)g(x)}{x-3} = -g(3).$$

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ τότε $g(3) = -g(3) \Leftrightarrow g(3) = 0$ (άτοπο). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Από γνωστό όριο βρίσκουμε την παράγωγο σ' αριθμό.

Στο όριο του πηλίκου των διαφορών $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ επιδιώκουμε την εμφάνιση των συναρτήσεων που το όριό τους είναι γνωστό από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2} = 2$.

Αν η f είναι συνεχής στο "σημείο" $x_0 = 1$, να δείξετε ότι στο "σημείο" αυτό είναι και παραγωγίσιμη.

Λύση

Για $x \neq 1$ θεωρούμε $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2}$, $\left(\lim_{x\to 1} g(x) = 2\right)$ οπότε

$g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)=f(x)$ (1) κοντά στο $x=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\right]=2\cdot 0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ έχουμε $f(1)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1} g(x)\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=2\cdot\dfrac{2}{4}=1$

Άρα $f'(1)=1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και για την f γνωρίζουμε ότι:

i. ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση και

ii. είναι παραγωγίσιμη στο α.

Σκοπεύουμε να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ για κάθε $x_0\in\Delta$ είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή γνωρίζουμε:

1. το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$, αφού η f ως παραγωγίσιμη στο α είναι και συνεχής στο $x=\alpha$

2. το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$.

θα αλλάξουμε μεταβλητή και στη θέση του x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$ μη σταθερή που θα έχει τα εξής δύο χαρακτηριστικά:

1° $\lim\limits_{h\to\alpha} g(h)=x_0$.

2° Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Υπόδειξη: Είναι χρήσιμη μια επανάληψη της μεθόδου 4 στο μάθημα 7.

Σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0 μπορούμε άμεσα να βρούμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Παράδειγμα 9

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+15xy$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in R$, όπου x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad (1)$$

Για να προσδιορίσουμε το f(0) θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x=y=0$ οπότε παίρνουμε :

$$f(0+0)=f(0)+f(0)+15\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

και η σχέση (1) γίνεται: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ (2)

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)+15x_0h-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+15x_0h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+15x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+15x_0\overset{(2)}{=}f'(0)+15x_0$$

Δείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in R$ αφού $f'(x_0)=f'(0)+15x_0$ είναι πραγματικός αριθμός οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=f'(0)+15x$, $x\in R$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Εύρεση ορίου με δεδομένο την παραγωγισιμότητα της f σε κάποιο θέση $x=\alpha$.

Για την άρση της απροσδιοριστίας που προκύπτει προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ (αφού η f ως παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$ είναι και συνεχής στο α) και $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ κάνοντας, όπου χρειάζεται, αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 10

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-xf(x)+xf(x)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=$

$$\lim_{x\to\alpha}\left[x\frac{f(\alpha)-f(x)}{x-\alpha}+f(x)\frac{x-\alpha}{x-\alpha}\right]=\lim_{x\to\alpha}\left[-x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(x)\right]=-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha).$$

Παράδειγμα 11

Έστω f παραγωγίσιμη στο $x\in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{h}=\alpha f'(x)$, με $\alpha\in \mathbb{R}^*$ **ii.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+4h)-f^2(x-h)}{h}=10f(x)f'(x)$

Λύση

i. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{h}\underset{\lim\limits_{h\to 0}(\alpha h)=0}{\overset{\alpha h=t}{=}}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}\alpha=\alpha f'(x)$

ii. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+4h)-f(x-h)}{h}[f(x+4h)+f(x-h)]=$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+4h)-f(x))-(f(x-h)-f(x))}{h}[f(x+4h)+f(x-h)]=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right][f(x+4h)+f(x-h)]\overset{(i)}{=}$$

$$[4f'(x)-(-1)f'(x)](f(x)+f(x))=10f'(x)f(x)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Για την εύρεση Παραγώγου με δεδομένη ανισοτική σχέση με κατάλληλους μετασχηματισμούς στην ανισοτική σχέση “παγιδεύουμε” το πηλίκο των διαφορών $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ μεταξύ δύο συναρτήσεων που έχουν το ίδιο όριο και αξιοποιούμε το **Κριτήριο της Παρεμβολής**.

Παράδειγμα 12

Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x)-2y^3\le f(x+y)\le f(x)+2y^3$**, για κάθε** $x,y\in \mathbb{R}$**.**
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{r} f(x)-2y^3\le f(x+y)\le f(x)+2y^3 \\ \text{θετουμε } x=x_0 \\ y=h \end{array}\right\}$ οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$f(x_0)-2h^3\le f(x_0+h)\le f(x_0)+2h^3$
$\Leftrightarrow -2h^3\le f(x_0+h)-f(x_0)\le 2h^3 \quad (1)$

Αν $h>0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} -2h^2 \le \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 2h^2 \\ \text{με } \lim_{h\to 0^+}\left(-2h^2\right)=0 \\ \text{και } \lim_{h\to 0^+}\left(2h^2\right)=0 \end{aligned}\right\} \text{οπότε } \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \quad (2)$$

σύμφωνα με το κριτήριο της Παρεμβολής.

Αν $h<0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} -2h^2 \ge \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 2h^2 \\ \text{με } \lim_{h\to 0^-}\left(2h^2\right)=0 \\ \text{και } \lim_{h\to 0^-}\left(-2h^2\right)=0 \end{aligned}\right\} \text{οπότε } \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R$ με $f'(x_0)=0$.

Άρα $f'(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Παράδειγμα 13

Αν η f πληρεί την συνθήκη $|f(x)-f(y)| \le \theta |x-y|^{\kappa}$, $\theta>0$, $\kappa>1$ για κάθε $x, y \in R$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

Για $y=x_0$, $x_0\in R$ η σχέση γίνεται: $|f(x)-f(x_0)| \le \theta |x-x_0|^{\kappa}$

και για $x\neq x_0$ είναι:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le \theta|x-x_0|^{\kappa-1} \Leftrightarrow -\theta|x-x_0|^{\kappa-1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \theta|x-x_0|^{\kappa-1}$$

Αφού $\lim_{x\to x_0}\theta|x-x_0|^{\kappa-1}=0$ και $\lim_{x\to x_0}\left(-\theta|x-x_0|^{\kappa-1}\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$$

Άρα $f'(x_0)=0$ για κάθε $x_0\in R$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

(Θα δούμε αργότερα ότι $f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=c$, για $x\in R$)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+2$ στο σημείο με τετμημένη $x=3$.

Σημείωση: Ως "κάθετη" στην C_f ορίζουμε την κάθετη στην εφαπτομένη στο αντίστοιχο σημείο

$\left(\textbf{Απ.: } y-2=-\frac{1}{3}(x-3)\right)$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\kappa x^2-\lambda, & \text{αν } x<1\\ -\frac{\mu}{x}, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$

Να βρείτε τα $\kappa, \lambda, \mu \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο $P(1,f(1))$ να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x+y-4=0$.

$\left(\textbf{Απ.: } \kappa=\frac{1}{6}, \lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{3}\right)$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g,h:R\to R$ τέτοιες ώστε:

$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, για κάθε $x\in R$, $f(2)=g(2)=h(2)$ και $f'(2)=h'(2)=2002$

Να δειχθεί ότι $g'(2)=2002$.

4. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0=2$ για τις οποίες ισχύουν:

$f(x)-g(x)\leq x^2$, για κάθε $x\in R$ και $f(2)-g(2)=4$

Να δείξετε ότι $f'(2)-g'(2)=4$.

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in R$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}x^2-\alpha x+2\beta, & x<0\\ -\sqrt{x^2+1}, & x\geq 0\end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

$(\textbf{Απ.: } \alpha=0,\ \beta=-1)$

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in R$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4\alpha x+\beta-3}{x-1}, & x<1\\ -\sqrt{x}, & x\geq 1\end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

$\left(\textbf{Απ.: } \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=4\right)$

7. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο R και η κλίση της στο σημείο με τετμημένη 4 είναι $\frac{1}{7}$, να βρείτε την κλίση της στο σημείο με τετμημένη -4.

$\left(\textbf{Απ.: } f'(-4)=\frac{1}{7}\right)$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -\alpha x^2 + 3\beta x$. Να βρείτε τα α, β∈ R για τα οποία η γραφική παράσταση της f στο σημείο Α (1, -3) έχει εφαπτομένη με κλίση -3.

(**Απ.:** $\alpha = 0, \beta = -1$)

9. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

i. Η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

ii. $2x^3 - 4x^4 \leq xf(x) \leq 2x^3 - 4x^4$ για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε:

α. την τιμή της f, στο $x = 0$ **β.** την τιμή της f΄ στο $x = 0$.

(**Απ.:** $f(0) = 0, f'(0) = 0$)

10. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2|x-2|$ δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(2, f(2))$.

11. Έστω $f : R \to R$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 5$. Αν $g(x) = 2f(x) - x$ να βρεθεί η g΄(0).

(**Απ.:** $g'(0) = 9$)

12. Να βρεθούν α, β, γ ώστε η f(x) να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^3 + \gamma x + 2 & x > 1 \end{cases}$

(**Απ.:** $\alpha = 3, \beta = -4, \gamma = -1$)

13. Αν η f είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu x$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(**Απ.:** Δικαιολογήστε ότι $f(0) = 0$ και βρείτε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$)

14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha \ (\alpha > 0)$ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$ **ii.** $\lim_{x \to \alpha} \frac{(f(x))^2 - (f(\alpha))^2}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$

(**Απ.: i.** $2\sqrt{\alpha} \cdot f'(\alpha)$ **ii.** $4f(\alpha) \cdot \sqrt{\alpha} f'(\alpha)$)

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in R \ (x, y \neq 0)$ ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R^*$

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $f(1) = 0$. Ισχύει $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

και προσπαθήστε να δείξετε ότι υπάρχει $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $2(x-1) \le f(x) \le x^2 - 1$ (1)

i. Να δειχτεί ότι: $f(1) = 0$

ii. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

(**Υπ.:** Για $x = 1$ η (1) δίνει $f(1) = 0$. Για $x > 1$ και μετά για $x < 1$ δημιουργείστε από την (1) την παράσταση $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και υπολογίστε το όριο της)

17. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to R$ και $\alpha \in A$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(x) + x \le g(x) + \alpha$ για κάθε $x \in A$ να δείξετε ότι $f'(\alpha) + 1 = g'(\alpha)$.

(**Υπ.:** Δείξτε για $x < \alpha$ ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)f(\alpha)}{x-\alpha} + 1 \le \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ και για $x > \alpha$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)f(\alpha)}{x-\alpha} + 1 \le \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ και λάβετε υπόψην σας ότι $f'(\alpha) = g'(\alpha)$)

18. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x}$$

(**Υπ.:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) + f(0) - f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x} = \ldots = 2$

19. Αν για συνάρτηση f ισχύει: $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2, f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in R$ και $g(x) = 2f(x) + \frac{x^2}{f(x)}$ να βρεθεί $g'(0)$.

(**Υπ.:** Ζητάμε $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Αξιοποιήστε τα δεδομένα)

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $x^2 - 5x + 6 = f^3(x) + f(x)$ (1). Να βρεθεί η $f'(2)$.

(**Υπ.:** Ζητάμε $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Βρείτε $f'(2)$ από την (1) για $x = 2$ και μετασχηματίστε την (1) σε $(x-3)(x-2) = f(x)\left(f^2(x)+2\right) \Rightarrow x - 3 = \frac{f(x)}{x-2}\left(f^2(x)+1\right)$ από όπου $f'(2) = -1$

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο της γραφικής της παράστασης με τετμημένη $x = 3$ είναι $2y = 2\sqrt{3}x + 1 - 6\sqrt{3}$ να υπολογίσεται το $\lim\limits_{x\to 3} \frac{[f(x)]^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(\alpha, 0)$ και είναι κάθετη στην εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο της $\left(\frac{\pi}{2}, h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.



Παράγωγος συνάρτησης
Κανόνες παραγώγισης
Εξίσωση εφαπτομένης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Παράγωγος συνάρτησης - κανόνες παραγώγισης

Ορισμός

Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα Α όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του Α.

Η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε x του Α στον παράγωγο αριθμό του $f'(x)$, ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$ ή $\frac{dy}{dx}$ (αν $y=f(x)$).

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. Αν $f(x)=c,\ \ c\in R$ τότε $f'(x)=0$ $\qquad (c)'=0$

β. Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$ $\qquad (x)'=1$

γ. Αν $f(x)=x^{\nu}\ \ \nu\in N\text{-}\{0,1\}$ τότε $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\qquad (x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ \ x\in[0,+\infty)$ (στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη)

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ε. Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

στ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'(x)=-\eta\mu x$ $\qquad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ζ. Αν $f(x)=e^{x}$ τότε $f'(x)=e^{x}$ $\qquad (e^{x})'=e^{x}$

η. Αν $f(x)=\ln x,\ \ x>0$ τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c\in R$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $(cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Προσοχή:

Αν $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$ τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίστιμη στο R^* με $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$

Άρα γενικά ισχύει: $(x^{\kappa})'=\kappa\cdot x^{\kappa-1}$ για κάθε $\kappa\in Z-\{0,1\}$.

Επίσης με τον κανόνα του πηλίκου εύκολα προκύπτουν :

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \qquad (\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x},\eta\mu x\neq 0$$

Σχόλια

1. Αν η $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο A, αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά οι f, g είναι συγχρόνως και οι δύο παραγωγίσιμες στο A.

2. Επίσης, μπορεί η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη στο A, χωρίς κατ' ανάγκη η f να είναι παραγωγίσιμη.

3. Αν μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η $(f+g)$ και η $(f-g)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για την $(f\cdot g)$. Αν κάποια από τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο δεν βγάζουμε άμεσα συμπέρασμα για την παράγωγο του γινομένου.

Παράδειγμα

Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=ημx$. Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση

Είναι $\ell im_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\ell im_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}ημx}{x}=0\cdot 1=0$

Άρα η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ενώ η $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

5. Αν γνωρίζουμε τον $f'(α)$ τότε το $\ell im_{x\to α}\dfrac{f(x)-f(α)}{x-α}$ είναι ίσο με την τιμή της f' στο α.

Γράφουμε $\ell im_{x\to α}\dfrac{f(x)-f(α)}{x-α}=f'(α)=\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=α}$.

Για παράδειγμα είναι : $\ell im_{x\to α}\dfrac{e^x-e^α}{x-α}=\left(\dfrac{d(e^x)}{dx}\right)_{x=α}=(e^x)_{x=α}=e^α$

$\ell im_{x\to 1}\dfrac{\ell nx}{x-1}=\left(\dfrac{d(\ell nx)}{dx}\right)_{x=1}=\left(\dfrac{1}{x}\right)_{x=1}=\dfrac{1}{1}=1$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

i. $f(x)=3x^4+x^2-4$ **ii.** $f(x)=-x^3+ημx+\sqrt{x}$

iii. $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ **iv.** $f(x)=2συνx+\ln 5$

v. $f(x)=2εφx+σφx-1$ **vi.** $f(x)=x^4+x+\sqrt{5}$

Λύση

i. $f'(x)=\left(3x^4+x^2-4\right)'=12x^3+2x$

ii. $f'(x)=\left(-x^3+ημx+\sqrt{x}\right)'=-3x^2+συνx+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

iii. $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\ln x\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}$

iv. $f'(x)=(2συνx+\ln 5)'=-2ημx$

v. $f'(x)=(2εφx+σφx-1)'=\dfrac{2}{συν^2x}-\dfrac{1}{ημ^2x}$

vi. $f'(x)=\left(x^4+x+\sqrt{5}\right)'=4x^3+1$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ln x\cdot ημx$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^2\ln x$

iii. $f(x)=\sqrt{x}\cdot ημx$ **iv.** $f(x)=(x^3-2)\ln x$

v. $f(x)=ημx\cdot συνx$ **vi.** $f(x)=-3x\cdot ημx$

Λύση

i. $f'(x)=(\ln x\cdot ημx)'=(\ln x)'\cdot ημx+\ln x\cdot(ημx)'=\dfrac{1}{x}ημx+\ln x\cdot συνx$

ii. $f'(x)=\left(\dfrac{x^4}{4}-x^2\ln x\right)'=\dfrac{4x^3}{4}-\left(2x\ln x+x^2\dfrac{1}{x}\right)=x^3-2x\ln x-x$

iii. $f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot ημx\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}ημx+\sqrt{x}\cdot συνx$

iv. $f'(x)=\left((x^3-2)\ln x\right)'=3x^2\ln x+(x^3-2)\cdot\dfrac{1}{x}$

v. $f'(x)=(ημx\cdot συνx)'=(ημx)'\cdot συνx+ημx\cdot(συνx)'=συν^2x-ημ^2x=συν2x$

vi. $f'(x)=(-3x\cdot ημx)'=-3ημx-3x\cdot συνx$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

iv. $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln x}$ **v.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **vi.** $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Λύση

i. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+4x}\right)'=\dfrac{1'\cdot(x^2+4x)-1\cdot(x^2+4x)'}{(x^2+4x)^2}=\dfrac{-(2x+4)}{(x^2+4x)^2}=-\dfrac{2(x+2)}{(x^2+4x)^2}$

ii. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\dfrac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=$

$\dfrac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

iii. $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{e^x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot e^x-\ln x\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}e^x-\ln x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{e^x\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)}{\left(e^x\right)^2}=$

$\dfrac{\frac{1-x\ln x}{x}}{e^x}=\dfrac{1-x\ln x}{x\cdot e^x}$

iv. $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{\ln x}\right)'=\dfrac{\left(x^3\right)'\cdot\ln x-x^3(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{3x^2\cdot\ln x-x^3\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{3x^2\cdot\ln x-x^2}{(\ln x)^2}=\dfrac{x^2\cdot(3\ell nx-1)}{\ell n^2x}$

v. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{1'\cdot\sqrt{x}-1\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

vi. $f'(x)=\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\dfrac{\left(e^x+1\right)'\left(e^x-1\right)-\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=$

$\dfrac{e^x\left(e^x-1-e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

- Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο A και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h=fog$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ή $\dfrac{dh}{dx}=\dfrac{dh}{du}\dfrac{du}{dx}$ όπου $u=g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

Προσοχή:

Αν $\alpha\in R-Z$ τότε $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $x>0$.

Αν $\alpha>0$ τότε $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$, $x\in R$ και $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$, $x\in R^*$.

Αν $0<\alpha\neq1$ τότε $\left(\ell og_\alpha|x|\right)'=\dfrac{1}{\ell n\alpha}\cdot\dfrac{1}{x}$, $x\in R^*$

Αν $f(x)>0$ τότε $\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{g(x)\ell nf(x)}\right)'=f(x)^{g(x)}\left[g(x)\ell nf(x)\right]'$

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά (χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^{ν}	$\nu \cdot f^{\nu-1} \cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}} f'$
$\eta\mu f$	$\sigma\upsilon\nu f \cdot f'$	$\sigma\upsilon\nu f$	$-\eta\mu f \cdot f'$
$\varepsilon\varphi f$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f} \cdot f'$	$\sigma\varphi f$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 f} \cdot f'$
e^f	$e^f \cdot f'$	$\ln f$	$\frac{1}{f} f'$
$\alpha^f, \alpha > 0$	$\alpha^f \ln \alpha \cdot f'$	$\ell og_{\alpha} f,\ 0 < \alpha \neq 1$	$\frac{1}{\ell n\alpha} \cdot \frac{1}{f} \cdot f'$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \left(4x^3 + x - 1\right)^4$ **ii.** $f(x) = \ln\left(\sqrt{x} + 1\right)$ **iii.** $f(x) = \sqrt{\ln x}$

iv. $f(x) = 5\eta\mu^3 x + 1$ **v.** $f(x) = \eta\mu(3x - 1)$ **vi.** $f(x) = e^{x^2+1}$

Λύση

i. Είναι $f'(x) = \left(\left(4x^3 + x - 1\right)^4\right)' = 4\left(4x^3 + x - 1\right)^3\left(4x^3 + x - 1\right)' = 4\left(4x^3 + x - 1\right)^3\left(12x^2 + 1\right)$

ii. Επίσης $f'(x) = \left(\ln\left(\sqrt{x} + 1\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\left(\sqrt{x} + 1\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)}$

iii. Ισχύει $f'(x) = \left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

iv. Έχουμε $f'(x) = \left(5\eta\mu^3 x + 1\right)' = 15\eta\mu^2 x \cdot (\eta\mu x)' = 15\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

v. $f'(x) = \left(\eta\mu(3x - 1)\right)' = \sigma\upsilon\nu(3x - 1)(3x - 1)' = 3\sigma\upsilon\nu(3x - 1)$

vi. $f'(x) = \left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} \cdot \left(x^2 + 1\right)' = 2x \cdot e^{x^2+1}$

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$ **ii.** $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$ **iii.** $f(x) = \sqrt[6]{3x - 2}$

Λύση

i. Έχουμε $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$ με $x\geq 0$.

Είναι $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

για $x>0$.

ii. Είναι $f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$, με $x\in R$.

Είναι $f(x)=\left(\sqrt[5]{x^2+1}\right)'=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{1}{5}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}}\cdot 2x=\frac{2x}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}}$

iii. Είναι $f(x)=\sqrt[6]{3x-2}$, με $3x\text{-}2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}$.

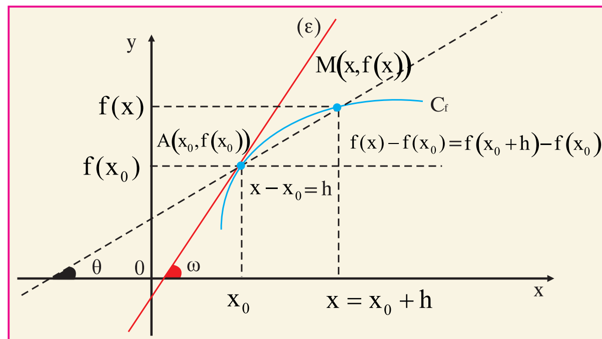
Είναι $f'(x)=\left(\sqrt[6]{3x-2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{1}{6}}\right)'=\frac{1}{6}(3x-2)^{-\frac{5}{6}}(3x-2)'=$

$\frac{1}{6}\frac{1}{(3x-2)^{\frac{5}{6}}}\cdot 3=\frac{3}{6\cdot\sqrt[6]{(3x-2)^5}}=\frac{1}{2\sqrt[6]{(3x-2)^5}}$, για $x>\frac{2}{3}$.

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις **i.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$ και **ii.** $f(x)=\sqrt[6]{3x-2}$ με χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι δεν είναι παραγωγίσιμες στις θέσεις $x=0$ και $x=\frac{2}{3}$ αντίστοιχα.

ΙΙ. Εξίσωση εφαπτομένης

Έχουμε ήδη αναφερθεί στο μάθημα 9 χωρίς να γνωρίζουμε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγώγισης. Υπενθυμίζουμε ότι:



αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ορίζουμε την ευθεία που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Ο αριθμός $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega$ ονομάζεται και κλίση της C_f στο σημείο Α.

Σχόλια

1. Προφανώς αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν έχει νόημα η αναζήτηση εφαπτομένης.

2. Μπορεί η εφαπτομένη (ε) να έχει και άλλα σημεία επαφής με την C_f .

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης σε καθορισμένο σημείο x_0. Βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$, την $f'(x)$ και στη συνέχεια την $f'(x_0)$.

Αν στο x_0 αλλάζει ο τύπος της f ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα με πλευρικά όρια.

Τέλος γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 όταν:

i. $f(x)=x^3+x-3,\quad x_0=1$ **ii.** $f(x)=2\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x,\quad x_0=\frac{\pi}{4}$

Λύση

i. Είναι: $f'(x)=3x^2+1$, $x\in R$.

για $x_0 = 1$ είναι:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 3\cdot 1^2 + 1 = 4 \\ f(x_0) = 1^3 + 1 - 3 = -1 \end{array}\right\}$$

Και επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ παίρνουμε

$$y\text{-}(-1) = 4\cdot(x-1) \Leftrightarrow y+1 = 4x-4 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = 4x-5}$$

ii. Είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$, $x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ f'(x_0) = 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} + 2\eta\mu\dfrac{\pi}{4} = \\ = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ f(x_0) = 2\eta\mu\dfrac{\pi}{4} - 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} = \\ = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{array}\right\}$$

Είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

οπότε

$$y\text{-}\ 0 = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon : y = 2\sqrt{2}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

Παράδειγμα 2

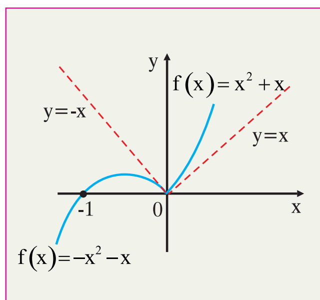
Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|(x+1)$ ορισμένη στο R. Να ελέγξετε αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στη θέση $x = 0$.

Λύση

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$

και $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-x-1) = -1$

Και επομένως δεν ορίζεται εφαπτομένη στη θέση x = 0. (Υπάρχουν δύο ημιεφαπτόμενες με εξισώσεις $y = x$ και $y = \text{-}x$)



Παράδειγμα 3

Αν $f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{9}{4}, & x\le\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{3}}{4x}, & x>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ **να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη** $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία** $\frac{\pi}{3}$ **.**

Λύση

Πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή πρέπει $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, το οποίο ισχύει.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{x^2-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{x^2-\frac{3}{4}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{4x}+\frac{3}{2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{\frac{-3\sqrt{3}+6x}{4x}}{\frac{2x-\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{2\left(6x-3\sqrt{3}\right)}{4x\cdot\left(2x-\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{3\left(2x-\sqrt{3}\right)}{2x\cdot\left(2x-\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$.

Ορίζεται επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

Τότε $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\text{εφω}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\text{εφω}$, οπότε $\omega=\frac{\pi}{3}$ διότι $0\le\omega<\pi$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για την εύρεση εφαπτομένων της C_f που πληρούν μια ιδιότητα I, θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και βρίσκουμε για ποιες τιμές του x_0 η εφαπτομένη (ε) έχει την ιδιότητα I. Η εύρεση του σημείου επαφής μας δίνει την εξίσωση που ζητάμε.

Όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Κ (α, β) το οποίο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της f
γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f, που είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και απαιτούμε να διέρχεται απο το σημείο Κ (α , β), δηλαδή να ισχύει: $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$. Η λύση της τελευταίας εξίσωσης μας δίνει το πλήθος των σημείων επαφής και τις τετμημένες τους.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$ η οποία "άγεται" από το σημείο Κ (3, 5).

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2x - 1$. Το σημείο Κ προφανώς δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της f γιατί $f(3) = 6 \neq 5$. Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α είναι η :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ ή } y - (x_0^2 - x_0) = (2x_0 - 1)(x - x_0) \quad (1)$$

Η (1) πρέπει να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Κ. Δηλ.

$$5 - x_0^2 + x_0 = (2x_0 - 1)(3 - x_0) \Leftrightarrow 5 - x_0^2 + x_0 = 6x_0 - 2x_0^2 - 3 + x_0 \Leftrightarrow$$

$x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0$ με ρίζες $x_0 = 4$ και $x_0 = 2$

Άρα προκύπτουν δύο εφαπτόμενες με εξισώσεις :

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - 12 = 7(x - 4) \Leftrightarrow y = 7x - 16 \text{ και}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 4.$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - x + 1$ που διέρχεται από το Μ (1,1).

Λύση

Έστω $A(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής. Είναι $f'(x) = 2x - 1$, οπότε

$f'(x_0) = 2x_0 - 1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(x - x_0).$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$, οπότε :

$1-\left(x_0^{\ 2}-x_0+1\right)=(2x_0-1)(1-x_0)\Leftrightarrow 1-x_0^{\ 2}+x_0-1=2x_0-2x_0^{\ 2}-1+x_0\Leftrightarrow$

$x_0^{\ 2}-2x_0+1=0\Leftrightarrow (x_0-1)^2=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$\varepsilon: y-\left(1^2-1+1\right)=(2\cdot 1-1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f που είναι :

i. κάθετη προς γνωστή ευθεία (ε_1) με $\lambda_{\varepsilon_1}\neq 0$.

ii. παράλληλη προς γνωστή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης πραγματικό αριθμό.

Τότε:

i. Αυτό σημαίνει ότι: $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ δηλαδή $f'(x_0)\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ (1).
Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στην εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της δοσμένης ευθείας να ισούται με τον παράγωγο αριθμό της f στο σημείο επαφής.

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$**, οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία** $2y-x+1=0$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{-2\}$ με

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)'(x+2)-(x^2-1)(x+2)'}{(x+2)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

Πρέπει :

$$f'(x_0)\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow \frac{x_0^{\ 2}+4x_0+1}{(x_0+2)^2}\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow x_0^{\ 2}+4x_0+1=-2\left(x_0^{\ 2}+4x_0+4\right)\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\ 2}+4x_0+1+2x_0^{\ 2}+8x_0+8=0\Leftrightarrow 3x_0^{\ 2}+12x_0+9=0\Leftrightarrow 3\left(x_0^{\ 2}+4x_0+3\right)=0\Leftrightarrow$$

$x_0=-1$ ή $x_0=-3$

i. Για $x_0=-1$ η εφαπτομένη είναι :

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-0=-2(x+1)\Leftrightarrow y=-2x-2$$

ii. Για $x_0 = -3$ η εφαπτομένη είναι :

$$y - f(-3) = f'(-3)(x+3) \Leftrightarrow y + 8 = -2(x+3) \Leftrightarrow y = -2x - 14$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια ευθεία $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, χωρίς να μας προσδιορίζουν το σημείο επαφής.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη ταυτίζεται με την ευθεία (ε). Αρκεί λοιπόν να βρούμε σημείο $A(x_0, y_0)$ έτσι ώστε:

$$(1) \quad y_0 = \alpha x_0 + \beta$$

$$(2) \quad y_0 = f(x_0)$$

$$(3) \quad f'(x_0) = \alpha$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$ ώστε η ευθεία $y = x + \alpha$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.

Λύση

Η $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2x + \alpha$. Για να εφάπτεται η ευθεία $y = x + \alpha$ στην C_f αρκεί να υπάρχει σημείο (x_0, y_0) τέτοιο ώστε :

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + \alpha & (1) \\ y_0 = x_0^2 + \alpha x_0 + 1 & (2) \\ 2x_0 + \alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Από την (3) προκύπτει ότι: $x_0 = \dfrac{1-\alpha}{2}$

Από την (1) προκύπτει ότι: $y_0 = \dfrac{1-\alpha}{2} + \alpha = \dfrac{1+\alpha}{2}$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $\dfrac{1+\alpha}{2} = \left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)^2 + \alpha\dfrac{1-\alpha}{2} + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = -3$

Για $\alpha = 1$

Η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + x + 1$ στο A (0, 1).

Για $\alpha = -3$

Η ευθεία $y = x - 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 1$ στο B (2, -1).

Κατηγορία – Μέθοδος 5

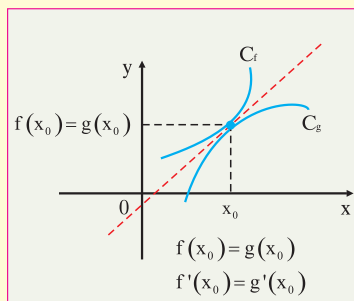
Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης σε κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g.

Αφού το M είναι κοινό σημείο πρέπει να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις : $\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \end{matrix}$.

Άρα είναι λύση της εξίσωσης , $f(x) = g(x)$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$ (1)

Αφού οι f, g παραγωγίζονται στο x_0 πρέπει οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο M να ταυτίζονται, δηλαδή να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης δηλαδή $f'(x_0) = g'(x_0)$ (2).

Έτσι έχουμε το σύστημα : $\begin{matrix} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{matrix}$



Παράδειγμα 8

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με $f'(x) = 2x + \alpha$ και

$g'(x) = 4x + 1$. Πρέπει να ισχύουν : $\begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha = 4 + 1 \\ \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{matrix}$

Παράδειγμα 9

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Λύση

Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και $g'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$

Αφού οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$ πρέπει : $f(1)=g(1)$ και $f'(1)=g'(1)$

Είναι $\left.\begin{aligned} f(1)=\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-1 \Leftrightarrow f(1)=\alpha+\beta-1 \\ g(1)=\dfrac{3\cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow g(1)=\dfrac{3}{2} \end{aligned}\right\}$ Οπότε $\alpha+\beta-1=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2\alpha+2\beta-2=3 \Leftrightarrow$

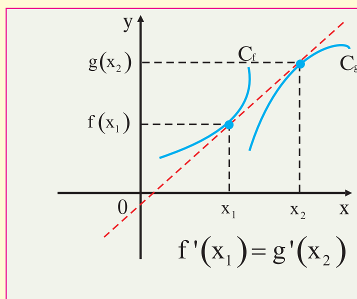
$2\alpha+2\beta=5 \quad (1)$

Επίσης $\left.\begin{aligned} f'(1)=2\alpha\cdot 1+\beta \Leftrightarrow f'(1)=2\alpha+\beta \\ g'(1)=\dfrac{3-3\cdot 1^2}{1^2+1} \Leftrightarrow g'(1)=0 \end{aligned}\right\}$ Οπότε $2\alpha+\beta=0 \quad (2)$

Απο τις (1) και (2) προκύπτει : $\alpha=-\dfrac{5}{2}$ και $\beta=5$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g σε διαφορετικά σημεία έστω A και B αντίστοιχα.



Αν τα σημεία A, B είναι γνωστά και ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο A με εξίσωση

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \;\text{ ή }\; y=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)x_1$$

και ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο B με εξίσωση:

$$y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \;\text{ ή }\; y=g'(x_2)x+g(x_2)-g'(x_2)x_2$$

για να ταυτίζονται οι ευθείες αυτές πρέπει οι εξισώσεις τους να είναι ίδιες :

Δηλ. πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ και $f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$.

Αν είναι γνωστό το ένα από τα δύο σημεία, έστω το $A(x_1,y_1)$, τότε θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο A, έστω $y=\alpha x+\beta$ και εξετάζουμε αν η ευθεία (ε) εφάπτεται και της C_g.

Παράδειγμα 10

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=2x^2+x+1$ και $g(x)=3x^2-11x+13$. Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των γραφικών τους παραστάσεων. Αν ναι, να βρεθεί η εξίσωσή της.

Λύση

i. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, δηλαδή αν έχει λύση το σύστημα :

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x+1=3x^2-11x+13 \\ 4x+1=6x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+12=0 \\ 2x=12 \end{cases}$$

που είναι φανερά αδύνατο , οπότε δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

ii. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη που εφάπτεται των C_f, C_g σε διαφορετικά σημεία έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ ελέγχοντας αν έχει λύση το σύστημα:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1+1=6x_2-11 \Leftrightarrow 2x_1=3(x_2-2) & (1) \\ 2x_1^2+x_1+1-x_1(4x_1+1)=3x_2^2-11x_2+13-x_2(6x_2-11) & (2) \end{cases}$$

και λύνοντας με τη βοήθεια της (1) προκύπτει : $x_2=2$ και $x_2=10$.

Για $x_2=2$ είναι $g'(2)=12-11=1$ και $g(2)=3$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-3=x-2 \Leftrightarrow y=x+1$$

Για $x_2=2$ η σχέση (1) δίνει $x_1=0$.

Οπότε $f(x_1)=f(0)=1$ και τα σημεία επαφής είναι A (0, 1), B (2, 3).

Για $x_2=10$ είναι: $g(10)=203$, $g'(10)=49$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y-g(10)=g'(10)(x-10) \Leftrightarrow y-203=49(x-10) \Leftrightarrow y=49x-287$$

Για $x_2=10$ η σχέση (1) δίνει $x_1=12$ άρα $f(x_1)=f(12)=301$ και τα σημεία επαφής είναι A (12, 301) B (10, 203).

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνονται οι $f: A \to A$ και $g: A \to A$, A διάστημα, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και αντιστρέψιμες στο A. Για τις δύο συναρτήσεις ισχύουν: $f'(x)=g^{-1}(x)$ και $g'(x)=f^{-1}(x)$.

Να δείξετε ότι $[(fog+gof)(x)]'=x[(f+g)(x)]'$.

Λύση

Ισχύει ότι $(f^{-1}of)(x) = x$

Είναι $[(fog + gof)(x)]' = (f(g(x)))' + (g(f(x)))' = f'(g(x))g'(x) + g'(f(x))f'(x) =$

$= g^{-1}(g(x))g'(x) + f^{-1}(f(x))f'(x) = xg'(x) + xf'(x) = x[(g+f)(x)]'$

Άσκηση 2

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (1) για κάθε $x, y \in R$. Να δειχθεί ότι $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

Λύση

Είναι $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (1)

(Παραγωγίζουμε με μεταβλητή x οπότε y και $f(y)$ είναι σταθερές)

Έτσι $f'(x+y)(x+y)' + f'(x-y)(x-y)' = 2f(y)f'(x)$

$f'(x+y) + f'(x-y) = 2f(y)f'(x)$ (Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή x)

$f''(x+y)(x+y)' + f''(x-y)(x-y)' = 2f(y)f''(x)$

$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(y)f''(x)$ (2)

Παραγωγίζουμε την σχέση (1) με μεταβλητή y.

$f'(x+y)(x+y)' + f'(x-y)(x-y)' = 2f(x)f'(y)$

$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$ (Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή y) οπότε

$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε $f(y)f''(x) = f(x)f''(y)$

Άσκηση 3

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα xx' όταν:

i. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **ii.** $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$

Λύση

i. Είναι $f'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Έτσι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ και επειδή

$f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii. Είναι $f'(x)=\left(\frac{x^3+2}{x}\right)'=\frac{(x^3+2)'\cdot x-(x^3+2)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{3x^2\cdot x-x^3-2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$

Είναι : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-2}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3-2=0 \Leftrightarrow 2(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$ και επειδή $f(1)=1^3+2=3$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,3)$ είναι παράλληλη στον x΄x.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

α. $f(x)=-4x^5$ **β.** $f(x)=-\frac{5}{x^2}$ **γ.** $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$ **δ.** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ε. $f(x)=-\frac{1}{2}\ln x$ **στ.** $f(x)=\frac{7}{\sqrt{x}}$ **ζ.** $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5x-3$

2. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x)=3\ln x(x^2+1)$ **β.** $f(x)=-6(x^2+1)(x^3-2)$ **γ.** $f(x)=x^2\eta\mu x$

δ. $f(x)=\frac{x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ **ε.** $f(x)=\frac{\ln x}{e^x}$ **στ.** $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

3. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x)=(x^2+1)^5$ **β.** $f(x)=\sqrt{x^3+x^5}$ **γ.** $f(x)=\ln(\eta\mu x)$

δ. $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}$ **ε.** $f(x)=\eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **στ.** $f(x)=5\eta\mu^2 x(4x+1)$

ζ. $f(x)=x^x$ **η.** $f(x)=x^{\eta\mu x}$ **θ.** $f(x)=-3\ln^3(\sqrt{x})$

ι. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **κ.** $f(x)=(\ell nx)^{x^2}$ **λ.** $f(x)=\varepsilon\varphi(3^x)$

4. Να βρεθούν τα α, β∈ R για τα οποία η ευθεία με εξίσωση $y=-2x+3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+1$ στο σημείο A (1, 1).

(**Απ.:**α = -2, β = 2)

5. Να βρείτε τα α, β∈ R ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x)=\alpha x^2+\beta x-1$ και $g(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=-1$.

$\left(\textbf{Απ.}: \alpha=\frac{1}{2}, \beta=1\right)$

6. Να βρείτε τα σημεία της C_f της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-2\eta\mu^2 x+\eta\mu 2x, x\in[0,2\pi]$ στα οποία οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

$\left(\textbf{Απ.:} \left(\frac{\pi}{2},-2\right), (\pi,0), \left(\frac{3\pi}{2},-2\right), (2\pi,0) \right)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{4}$. Να βρείτε σημείο του άξονα y΄y από το οποίο οι εφαπτομένες που άγονται προς την C_f να είναι κάθετες.

8. Έστω $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta, & x\le 2 \\ x^3+\gamma x, & x>2 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, $\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο Μ με τετμημένη 2 να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x+y-1=0$.

9. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=\sqrt{x-2}+x^2-1$ στο σημείο της με τετμημένη $x=2$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g (όχι σε κοινό σημείο των C_f, C_g).

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x-2$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in R$ ώστε η εξίσωση $y=\alpha x-3$ να εφάπτεται της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$ και να προσδιορίσετε το σημείο Μ.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta, & x\le 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x>1 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, $\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 1 να είναι κάθετη στην ευθεία $x-y-1=0$.

(**Απ.:** $\alpha=0,\ \beta=-1,\ \gamma=1$)

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ η οποία:

i. είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_1: x-y+2=0$

ii. είναι κάθετη προς την ευθεία $\varepsilon_2: x+5y+2=0$

14. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ **β.** $f(x)=\sqrt[5]{x^8}$ **γ.** $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f(x^2-1)-xf(x+1)=2x$, για κάθε $x\in R$ να δείξεται ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,f(0))$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης και στο $B(2,f(2))$.

16. Να δικαιολογήσετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: R\to R$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα της σχέσεις:

i. $f'(1)=1$ και **ii.** $\left[f(1+x)\right]^3=\left[f(1-x)\right]^2-x$ για κάθε $x\in R$.

(**Υπ.: i.** Θεωρήστε ότι υπάρχει και παραγωγήστε την
ii. Στην τελική σχέση θέτουμε x = 0 και καταλήγουμε σε άτοπο.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με τις ιδιότητες:

i. $f(x+y)=e^x\cdot f(y)+e^y\cdot f(x)$ **ii.** η f είναι παραγωγίσιμη **iii.** $f'(0)=1$

Να δείξετε ότι $f'(x)-f(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$.

(**Υπ.:** Θέτουμε y = 0 και βρίσκουμε f(0) = 0, $f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\ldots=e^x+f(x)$)

18. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\left|f(x)-2\ell nx\right|\le 3(x-1)^2$, $x>0$. Να δειχθεί ότι:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ell nx}{x-1}=1$ **β.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(x\cdot y)=f(x)-f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι $xf'(x)+yf'(y)=0$.

(**Υπ.:** Παραγωγίστε την (1) ως προς x και μετά ως προς y)

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. α. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

β. Έστω συνάρτηση $f:R^*\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και έστω ότι όλες οι εφαπτόμενες του γραφήματος της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=Cx$, $x\in R^*$ και $C\in R$.

Β. Δίνεται ότι η συνάρτηση f^3 είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0. Να εξεταστεί εάν η συνεχής συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Γ. Να προσδιοριστεί το πλήθος των καθέτων που άγονται από το σημείο $A=(\alpha,\beta)$ προς την παραβολή $y=x^2$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in R$.



Ρυθμός μεταβολής

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$ (ή και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής).

  Γεωμετρικά εκφράζει την κλίση της C_f στο $(x_0, f(x_o))$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x, $x \in \Delta$ την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $x \in \Delta$.

Παραδείγματα

Ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της ως προς την ακτίνα είναι $V'(r) = \frac{4}{3}3\pi r^2 = 4\pi r^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της όταν η ακτίνα είναι 2m είναι $V'(2) = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi \ m^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας όταν η ακτίνα της αυξάνει με ρυθμό $3 cm/s$

  είναι: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$ διότι $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ οπότε $V'(t) = \frac{4}{3}3\pi r^2(t) r'(t)$ ή

  $V'(t) = 4\pi r^2(t) r'(t)$ και αφού $r'(t) = 3cm/s$, θα έχουμε: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$
- Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού λέγεται και “ρυθμός μεταβολής της θέσης του” δηλαδή $\upsilon(t) = x'(t)$ αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του κινητού.
- Η επιτάχυνση $\alpha(t)$ ενός κινητού λέγεται και ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του δηλαδή $\alpha(t) = \upsilon'(t)$.

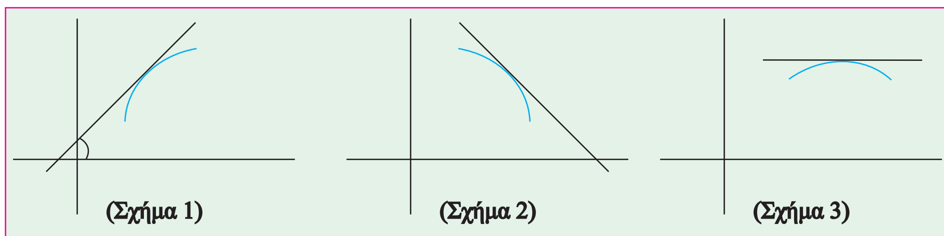
  Εφαρμόζεται σ’οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όπου κάποιο φυσικό, οικονομικό ή βιολογικό φαινόμενο μεταβάλλεται με το χρόνο.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σχηματίζουμε την εξίσωση που συνδέει τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν και στηρίζεται στην υπόθεση του προβλήματος.
2. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης που σχηματίσαμε ως προς κατάλληλη μεταβλητή (συνήθως είναι ο χρόνος), και έτσι εμφανίζουμε τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.
3. Επιλύουμε την τελευταία ως προς τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.
4. **Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής σε συγκεκριμένη θέση** τότε θέτουμε στον τελικό τύπο τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές για την δεδομένη θέση και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής στο x_0 φανερώνει την "τάση" που έχει το μέγεθος $y = f(x)$ να μεταβληθεί στη θέση x_0.



Έτσι: θετικός ρυθμός μεταβολής $(f'(x_0) > 0)$ σημαίνει αύξηση (σχ. 1)

αρνητικός ρυθμός μεταβολής $(f'(x_0) < 0)$ σημαίνει μείωση (σχ. 2)

$f'(x_0) = 0$ σημαίνει στασιμότητα (σχ. 3)

Μ'αυτήν τη λογική έχουμε τα πρόσημα στους αλγεβρικούς τύπους που προκύπτουν στην επίλυση των προβλημάτων.

Για παράδειγμα το μέγεθος x αυξάνει με ρυθμό K μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = K$, αν το μέγεθος x μειώνεται με ρυθμό K μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = -K$.

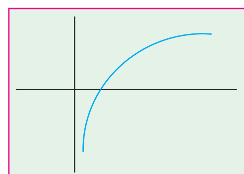
2. Μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής του y ως προς x είναι το πηλίκο των μονάδων μέτρησης του μεγέθους y προς τις μονάδες μέτρησης του x.

3. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου της f. Έτσι αν για παράδειγμα $f''(x_0) < 0$ σημαίνει ότι η f' έχει "μειωτική τάση" στο x_0 ανεξάρτητα με την τάση που έχει η ίδια η f στο x_0.

Για την $f(x) = \ell nx$ με $x > 0$

έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Η f έχει τάση αύξησης.

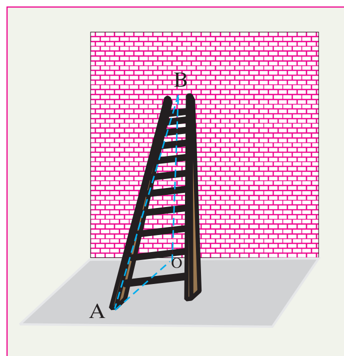
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Η f' έχει τάση μείωσης.



Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Μια σκάλα μήκους 13 m είναι στερεωμένη πλάγια σ' ένα τοίχο όπως στο σχήμα. Αν η βάση της γλυστράει με ρυθμό 4m/sec να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας τη χρονική στιγμή που το κάτω μέρος βρίσκεται σε απόσταση $x = 5$m από τον κατακόρυφο τοίχο.



Λύση

Έστω $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ οπότε $x'(t) = 4$ m/sec (θετικό γιατί είναι απομάκρυνση από το 0). Ζητούμενο $y'(t_0)$ όπου t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x(t_0) = 5$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $x^2(t) + y^2(t) = 13^2$.

Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0$ (1). Επίσης είναι $x(t_0) = 5$ και επειδή $x^2(t_0) + y^2(t_0) = 13^2$ έχουμε $y(t_0) = \sqrt{169 - 25} \Leftrightarrow y(t_0) = 12$ m.

Από την (1) έχουμε $5 \cdot 4 + 12y'(t_0) = 0$ οπότε είναι $y'(t_0) = -\frac{5}{3}$m/sec.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{27}x^3$. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η τετμημένη ενός σημείου μεταβάλλεται γρηγορότερα της τεταγμένης του.

Λύση

Θέτουμε $x(t)$, $y(t)$ τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \frac{1}{27}x^3$ και αφού μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου είναι: $y(t) = \frac{1}{27}x^3(t)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$(y(t))' = \left(\frac{1}{27}x^3(t)\right)' \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{27} \cdot 3x^2(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{9}x^2(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow$$

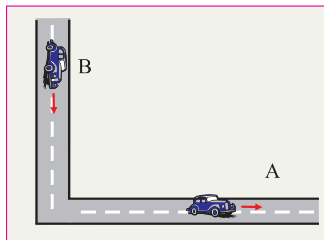
$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x^2(t)}{9}$ (1) (αφού $x'(t) \neq 0$). Απαιτούμε $x'(t) > y'(t) \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{x'(t)} < 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x^2(t)}{9} < 1 \Leftrightarrow x^2(t) < 9 \Leftrightarrow x^2(t) - 9 < 0 \Leftrightarrow (x(t) - 3)(x(t) + 3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x(t) < 3$$

Έτσι όταν $-3 < x < 3$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης ενός σημείου είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Άσκηση 3

Δύο αυτοκίνητα κινούνται σε κάθετους δρόμους. Το Α απομακρύνεται από τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 80 Km/h και το Β πλησιάζει τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 60 Km/h. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους όταν το Α απέχει από το Ο 8 km και το Β απέχει από το Ο 6 Km.



Λύση

Θεωρούμε $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ και $AB = s(t)$

Είναι $x'(t) = 80$ Km/h (το μέγεθος x αυξάνεται) και $y'(t) = -60$ Km/h (το μέγεθος y μειώνεται). Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $x^2(t) + y^2(t) = s^2(t)$.

Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 2s(t)s'(t)$.

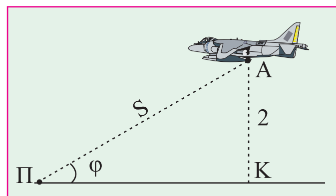
Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)\cdot y'(t_0) = 2s(t_0)s'(t_0)$ (1) με

$s(t_0) = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Άρα από την (1) προκύπτει: $8\cdot 80 + 6(-60) = 10\, s'(t_0) \Leftrightarrow s'(t_0) = 28$ Km/h

Άσκηση 4

Πολυβολητής (Π) αντιαεροπορικού βλέπει να έρχεται προς το μέρος του αεροπλάνο που πετά σε σταθερό ύψος 2 km με ταχύτητα 500 km/h. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ όταν η απόσταση του πολυβολητή από την προβολή Κ του αεροπλάνου στο έδαφος είναι 8 km.



Λύση

Θεωρούμε $A\Pi = s(t)$, $\Pi K = x(t)$, $x'(t) = -500$ km/h, $AK = 2$ Km.

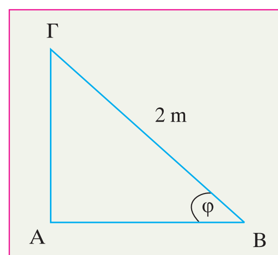
Είναι $\varepsilon\varphi[\varphi(t)] = \dfrac{2}{x(t)}$ και με παραγώγιση έχουμε $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\varphi(t))}\ \varphi'(t) = \dfrac{-2x'(t)}{x^2(t)}$ (1).

Τη χρονική στιγμή t_0 όπου $x(t_0) = 8$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu(\varphi(t_0)) = \dfrac{8}{s(t_0)} = \dfrac{8}{\sqrt{64+4}} = \dfrac{8}{\sqrt{68}}$.

Από την (1) έχουμε $\varphi'(t_0) = \dfrac{-2x'(t_0)}{x^2(t_0)}\cdot \sigma\upsilon\nu^2(\varphi(t_0)) = \dfrac{-2\cdot(-500)}{8^2}\cdot\left(\dfrac{8}{\sqrt{68}}\right)^2 = \dfrac{10^3}{68}$ rad/sec.

Άσκηση 5

Η γωνία του διπλανού σχήματος αυξάνεται με ρυθμό 1^0 ανά δευτερόλεπτο. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς ΑΓ, ως προς τον χρόνο, όταν $\varphi = 60^0$.



Λύση

Έστω $A\Gamma = x$. Τότε $x = 2\eta\mu\varphi$, οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(2\eta\mu\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 2\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

Προσοχή!

Δίνεται ότι η γωνία μεταβάλλεται με ρυθμό 1^0 ανά δευτερόλεπτο.

Είναι λάθος να γράψουμε ότι $\frac{d\varphi}{dt}=1$, κι' αυτό διότι η παραγώγιση έγινε με βάση τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι οποίοι ισχύουν μόνο όταν οι γωνίες είναι εκφρασμένες σε rad, δηλαδή σε ακτίνια.

Άρα πρέπει να εκφράσουμε το ρυθμό μεταβολής σε rad / sec και όχι σε μοίρες / sec.

Επειδή 1^0 είναι $\frac{\pi}{180}$ rad, έχουμε : $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=2\sigma\upsilon\nu 60^0\,\frac{\pi}{180}\,m/sec=\frac{\pi}{180}\,m/sec$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος υ. Να βρείτε :

i. το εμβαδόν Ε του τριγώνου ως συνάρτηση του ύψους

ii. το ρυθμό μεταβολής του Ε ως προς το ύψος όταν $\upsilon=\sqrt{6}$.

(**Απ.: i.** $E(\upsilon)=\frac{\sqrt{3}}{3}\upsilon^2$, **ii.** $E'(\sqrt{6})=2\sqrt{2}$)

2. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις x, y. Οι διαστάσεις αυξάνουν με ρυθμό $4\,m/sec$ και $5\,m/sec$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, ως συνάρτηση του χρόνου t, την χρονική στιγμή t_0, όπου $x=30cm$ και $y=40cm$.

(**Απ.:** $3{,}1m^2/sec$)

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=12 cm. Η κορυφή Α απομακρύνεται από την ΒΓ με ταχύτητα $3\,m/sec$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή απέχει από την ΒΓ 8 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α. της γωνίας ΒΑΓ **β.** της απόστασης ΑΒ.

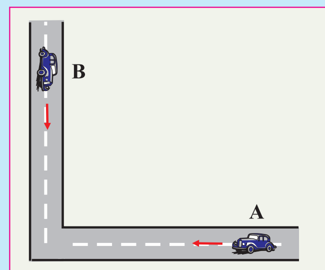
4. Οι τροχιές δύο οχημάτων Α και Β είναι κάθετες. Τα οχήματα Α, Β κινούνται όπως στο σχήμα έτσι ώστε:

$$(OA)+(OB)=20\,m.$$

Την χρονική στιγμή t_0 το όχημα Α κινείται με ταχύτητα $5\,m/sec$ και απέχει από το Ο απόσταση $(OA)=4$ cm.

Να βρείτε: **i.** την ταχύτητα του οχήματος Β

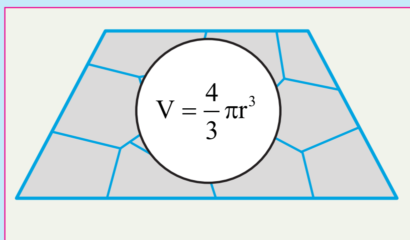
ii. τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ.



5. Ένας παρατηρητής (Π) βρίσκεται σε απόσταση 400 m από ένα αερόστατο (Α). Το αερόστατο ανέρχεται από το έδαφος με ταχύτητα $5\,m/sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\vartheta=\widehat{A\Pi T}$ και της απόστασης ΠΤ την χρονική στιγμή t_0 την χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται 500 m πάνω από το έδαφος, αν Τ η προβολή του αερόστατου στο έδαφος.

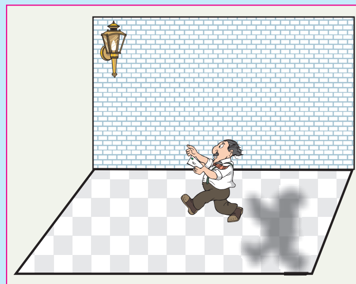
6. Μια μπάλα χιονιού σχήματος σφαίρας αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της μπάλας δίνεται από τον τύπο: $\rho = 5 - t^2$, ρ σε cm όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας την χρονική στιγμή $t = 2\sec$.

(όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).



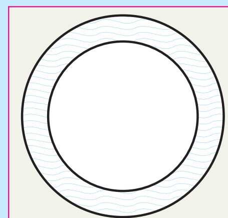
(**Απ.:** $-16\pi\, cm^3/s$)

7. Ένας άνθρωπος με ύψος 1,70 m περπατάει με ταχύτητα $2\,m/sec$ προς ένα φανοστάτη ύψους 3 m από το έδαφος. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του ανθρώπου.



(**Απ.:** 2,6 m/sec)

8. Το εμβαδόν του δακτυλίου που περικλείεται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι σταθερό και ίσο με $10\pi\ cm^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι $5m^2/sec$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου την χρονική στιγμή t_0 που το εμβαδόν του είναι $30\pi\ cm^2$.



9. Αν $\kappa(x), \pi(x)$ είναι το κόστος παραγωγής και η τιμή πώλησης x μονάδων προιόντος με τύπους: $\kappa(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 25x^2 - 300x + 500$ και $\pi(x) = 300x - 300$
να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους. Πότε ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός;

10. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$x(t) = t^3 - 2t^2 + 7t - 3, \quad 0 \le t \le 8$

i. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του κινητού.
ii. Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα είναι 6 μονάδες ανά sec;

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $x > 1$ και τα σημεία $A(x-1, 0)$ και $B(0, \ell nx)$.

Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $3\frac{cm}{sec}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής:

α. Της απόστασης (AB), τη χρονική στιγμή κατά την οποία $x = 2$ cm.
β. Του ενβαδού του τριγώνου ΟΑΒ (Ο η αρχή των αξόνων) την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνεται ότι: $\ell n2 \approx 0,7$ και $\sqrt{1,49} \approx 1,22$



Θεωρήματα Rolle – Μέσης Τιμής Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης τιμής

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Θεωρήματα Rolle - Μέσης τιμής

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]

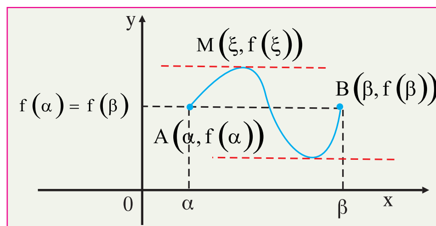
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και

$f(\alpha) = f(\beta)$

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

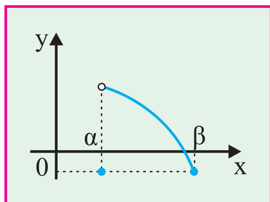
"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη (στην χορδή ΑΒ) στον άξονα $x'x$".



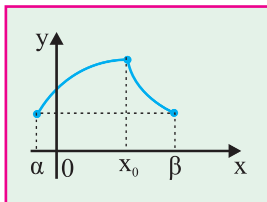
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

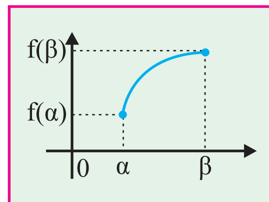
2. Πρέπει να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλιώς δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$



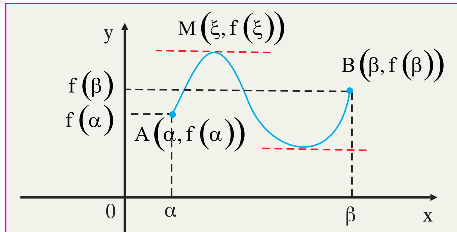
Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$

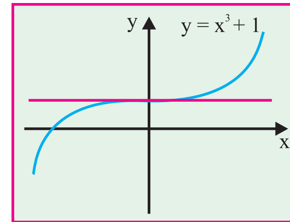


$f(\alpha) \neq f(\beta)$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

4. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει ρίζα της παραγώγου χωρίς να ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου δεν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$.





5. Το θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει ότι μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'. Δηλαδή αν $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

Γενίκευση: Εάν η f είναι ν-φορές παραγωγίσιμη και έχει κ διακεκριμένες ρίζες τότε η f' έχει $\kappa-1$ διακεκριμένες ρίζες, η f'' έχει $\kappa-2$ διακεκριμένες ρίζες κ.λ.π..

6. Επειδή στις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αναφέρεται ότι "η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)" τότε η f θα είναι και συνεχής στο (α, β). Άρα η προϋπόθεση "η f συνεχής στο [α, β] " μπορεί να αντικατασταθεί από το: " $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$ ".

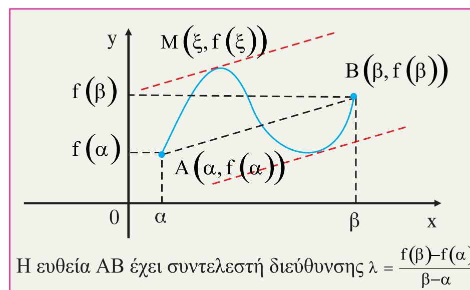
Από αυτά προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$ οπότε η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία



Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία (χορδή) AB".

- Κλασσική φυσική ερμηνεία: "Ύπαρξη χρονικής στιγμής t_0 όπου η στιγμιαία ταχύτητα $s'(t_0)=\upsilon(t_0)$ γίνεται ίση με την μέση ταχύτητα υ του κινητού".

Παράδειγμα: Το κινητό διήνυσε 200km σε 2,5 ώρες οπότε η συνάρτηση θέσης $s(t)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 2{,}5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2{,}5)$ οπότε υπάρχει $t_0\in(0,\ 2{,}5)$:

$$S'(t_0)=\frac{S(2{,}5)-S(0)}{2{,}5-0}=\frac{200-0}{2{,}5}=80\,km/h$$

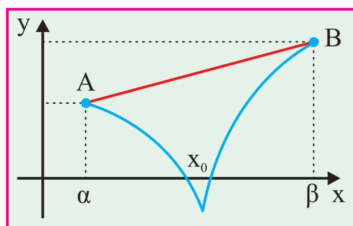
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Στην ειδική περίπτωση που εκτός από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. ισχύει επιπλέον ότι

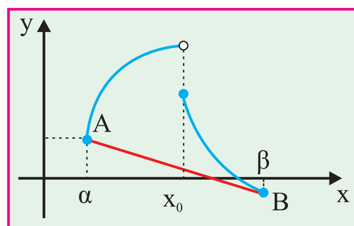
$f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$

(το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.)

2. Αν κάποια από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. δεν ισχύει, τότε το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

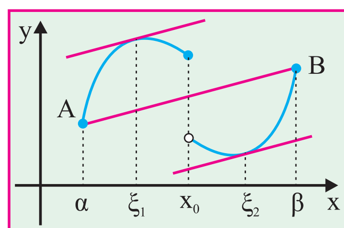


Δεν είναι παραγωγίσιμη η f στο (α,β)



Δεν είναι συνεχής στο [α,β]

3. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλά να υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ΑΒ.



4. Το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad ή \quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha)$$

5. Επειδή $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\xi)$ δεν μας περιορίζει η διάταξη των α και β αρκεί βέβαια $\alpha\neq\beta$.

6. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα το θεώρημα πάλι εφαρμόζεται.

ΙΙ. Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμης

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλια

1. Το αντίστροφο της πρότασης προφανώς ισχύει οπότε έχουμε πλέον την ισοδυναμία:
$f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$.

2. Η πρόταση δεν ισχύει όταν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα:
αν $f(x)=\begin{cases} 3, & x>0 \\ -5, & x<0 \end{cases}$ όπου f συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, έχουμε $f'(x)=0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. Εάν $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ τότε $f(x)=c\cdot e^x$, $c\in R$.

Πρόταση 2

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ τότε: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλιο

Από την πρόταση 2 προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- Διαφέρουν μεταξύ τους κατά c, δηλαδή $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=c$, $c\in R$.
- Έχουν παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία με ίδια τετμημένη $\xi\in\Delta$, $\lambda=f'(\xi)=g'(\xi)$.
- Έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής.

Για τον προσδιορισμό μιας από αυτές απαιτείται μία επιπλέον συνθήκη.

Παρατήρηση

Το διάστημα Δ στις προτάσεις 1 και 2 μπορεί να είναι:
$[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, (α,β), $(-\infty,\beta]$, $(-\infty,\beta)$, $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)=R$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε διάστημα (α,β):

α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).

β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος.

γ. Θεωρούμε το α΄ μέλος ίσο με μια συνάρτηση f. Εάν ο έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano στην f δεν αποδόσει, **τότε** θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει παράγωγο την f και σε αυτήν εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle. (Την F τη λέμε αρχική ή παράγουσα της f).

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4+4\alpha x^3-1=\alpha$, $\alpha\in R$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $\left[x^5+\alpha x^4-(\alpha+1)x\right]'=0$, οπότε:

θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=x^5+\alpha x^4-(\alpha+1)\ \ x$, με $\alpha, x\in$ IR. Η f είναι συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f'(x)=5x^4+4\alpha x^3-(\alpha+1)$ και $f(0)=f(1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ ώστε , $f'(\xi)=0$ δηλαδή $5\xi^4+4\alpha\xi^3-1=\alpha$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται το πολύ μια ρίζα σε διάστημα Δ

Δύο βασικές επιλογές

1η: Απαγωγή σε άτοπο από το Θ. Rolle

Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Rolle θα έχει η $f'(x)$ τουλάχιστον μία ρίζα που αποδεικνύεται άτοπο από τα δεδομένα

- είτε επειδή η $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο R,
- είτε επειδή η ρίζα της $f'(x)=0$ δεν ανήκει στο (α,β).

2η: Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη ή 1-1 οπότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η $2x^3-3x^2-36x+\sigma\upsilon\nu\theta=0$, $\theta\in R$ έχει μια το πολύ ρίζα στο (0, 1).

Λύση

Έστω ότι έχει δύο ρίζες $0<\rho_1<\rho_2<1$. Στο $[\rho_1,\rho_2]$ εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-36x+\sigma\upsilon\nu\theta$ η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Άρα εχουμε ότι η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho\in(\rho_1,\rho_2)\subset(0,1)$.

Όμως $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x-36=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ \text{ή}\\ x=3\end{cases}$ άτοπο διότι δεν ανήκουν στο $(0,1)$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x$ με $0<\alpha<\beta<\gamma$, έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

Λύση

Είναι $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x-1=0$. Θεωρούμε την $f(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x+(-1)$, ορισμένη στο R της οποίας η παράγωγος είναι $f'(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\ell n\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x\ell n\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)<0$ για $x\in R$

(αφού $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x > 0$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x > 0$, $\ell n\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) < 0$, $\ell n\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) < 0$). Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική λύση.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει ν το πολύ ρίζες.
Δείχνουμε ότι αποκλείεται να έχει $\nu + 1$ ρίζες. Αυτό γίνεται με τους εξής τρόπους:

i. Με το θεώρημα του Rolle στα ν διαστήματα
- **α.** Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μια παραπάνω ρίζα
- **β.** Θεωρούμε συνάρτηση αφού μεταφέρουμε τους όρους της εξίσωσης σε ένα μέλος.
- **γ.** Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες που υποθέσαμε και οδηγούμαστε σε άτοπο.

ii. Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα.

iii. Με τον βαθμό της συνάρτησης αν βέβαια προκειται για πολυωνυμική.

Αν το άτοπο δεν "φαίνεται" εύκολα, εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Rolle στα ν - 1 διαστήματα ή ακόμη και στα ν - 2, ν - 3, έως ότου καταλήξουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = \alpha x$, $\alpha \in$ IR έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Λύση

Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση, δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \alpha x$, έχει τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in$ IR με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \alpha x$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ με $f'(x) = -e^{-x} - \alpha$.

Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και $f(x_2) = f(x_3) = 0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και έτσι υπάρχουν, $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$, αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $f'(x) = -e^{-x} - \alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(x) = e^{-x}$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$, δηλαδή $e^{-x_0} = 0$ άτοπο. Άρα η δοσμένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες οπότε θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Σχόλιο: Όταν ζητείται μια ακριβώς ρίζα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο (Θ. Bolzano ή Rolle) και στη συνέχεια το πολύ μια με την προηγούμενη μέθοδο.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ ισοδυναμεί με την $x \cdot 3^x - 1 = 0$ στο διάστημα $(0,1)$ οπότε για την $f(x) = x \cdot 3^x - 1$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$. Αν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3^\xi + \xi 3^\xi = 0 \Leftrightarrow 3^\xi(1+\xi) = 0 \Leftrightarrow$ $\xi = -1$ (άτοπο) άρα η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f.

α. Οριζόντιας εφαπτομένης της f σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β. Εφαπτομένης που πληροί ορισμένες (γεωμετρικές) προϋποθέσεις.

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{x^2+1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

Λύση

Έστω $\kappa \in Z$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa, \kappa+1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\kappa, \kappa+1)$. Ισχύει $f(\kappa) = 0 = f(\kappa+1)$ οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\kappa, \kappa+1)$ ώστε $f'(\kappa) = 0$. Αφού $\kappa \in Z$, τα διαστήματα είναι άπειρα δηλαδή υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της με συντελεστή διεύθυνσης $f'(\kappa) = 0$ και επομένως είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

Παράδειγμα 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi x) + \alpha x^2 + \beta x$, όπου $\alpha, \beta \in R$, $x \in R$ με $\alpha + \beta = 1$ (1). Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία ε_1: $y + x = 3$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1). Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha + \beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x_0) = 1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$. Ισχύει $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία ε σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ε_1.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη $x_0 \in (\alpha,\beta)$ που πληρεί μια συνθήκη $h(x_0)=0$

Επιλέγουμε μια συνάρτηση $H(x)$ για την οποία ισχύει $H'(x)=h(x)$ και αποδεικνύουμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

Τότε θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta):\ H'(x_0)=0 \Leftrightarrow h(x_0)=0$.

Η συνάρτηση H ονομάζεται “αρχική” η “παράγουσα” της h.

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον παρακάτω πίνακα:

Δίνεται ότι: η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) **Ζητείται η ύπαρξη ξ που ικανοποιεί τη σχέση**	**Βοηθητική συνάρτηση h στην οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle**
$f'(\xi)=c$	$h(x)=f(x)-cx$
$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$	$h(x)=f(x)-x^{\nu}$
$f'(\xi)\cdot(c-\xi)=f(\xi)$	$h(x)=(x-c)f(x)$
$f'(\xi)\cdot(\xi-c)=f(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$
$\xi\cdot f'(\xi)=\nu\cdot f(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$
$f'(\xi)=cf(\xi)$	$h(x)=e^{-cx}f(x)$

Σχόλιο

Αποκλείεται το Θεώρημα Bolzano όταν δεν τονίζεται ότι $f'(x)$ είναι συνεχής.

Δύο ειδικές περιπτώσεις

1. Αν $g(x)\neq 0$ και ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)=0$

θεωρούμε την συνάρτηση $T(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ως βοηθητική.

2. Αν ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)=0$.

θεωρούμε την συνάρτηση $S(x)=e^{g(x)}f(x)$ ως βοηθητική.

Σχόλιο

Για την επιλογή της βοηθητικής συνάρτησης σε κάποιες ασκήσεις δίνουν σημαντική πληροφορία οι σχέσεις στα άκρα του διαστήματος που δίνονται από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

i. Για την συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, $c\notin[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):F'(x_0)=0$

ii. Αν $c\notin[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c,0)$.

Λύση

i. Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

$F(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-c}=0$ και $F(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-c}=0$ άρα $F(\alpha)=F(\beta)=0$.

Συνεπώς από το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):F'(x_0)=0$

ii. Έχουμε: $F'(x)=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)(x-c)'}{(x-c)^2}=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$.

Αφού $F'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-c)-f(x_0)=0$ (1)

Η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Εξετάζουμε αν το σημείο $(c,0)$ την επαληθεύει. Πράγματι λόγω της (1) ισχύει:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(c-x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-c)-f(x_0)=0.$$

Παράδειγμα 9

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(\kappa)=\lambda^2$ και $f(\lambda)=\kappa^2$ και $\kappa>\lambda$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\lambda,\kappa)$ με $f'(\xi)=-2\xi$.

Λύση

Είναι $f'(\xi)+2\xi=0$ οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$, $x\in[\lambda,\kappa]$ με $g'(x)=f'(x)+2x$.

Η g είναι συνεχής στο $[\lambda,\kappa]$, παραγωγίσιμη στο (λ,κ) και $g(\lambda)=g(\kappa)=\kappa^2+\lambda^2$. Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\lambda,\kappa)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+2\xi=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-2\xi$.

Παράδειγμα 10

Έστω f παραγωγίσιμη στο (e,e^2) συνεχής στο $[e,e^2]$ για την οποία ισχύει: $f(e^2)=2f(e)$.

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(e,e^2)$ ώστε $f'(\xi)\cdot \ell n\xi^{\xi}=f(\xi)$.

Λύση

Αρκεί η $f'(x)\ell nx^{x}=f(x)$ να έχει λύση στο (e,e^2).

Ισχύει $f'(x)\ell nx^{x}=f(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot x\cdot \ell nx=f(x)\Leftrightarrow f'(x)\ell nx=\dfrac{1}{x}f(x)\Leftrightarrow$

$f'(x)\ell nx=(\ell nx)'f(x)\Leftrightarrow f'(x)\ell nx-(\ell nx)'f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)\ell nx-(\ell nx)'f(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{\ell nx}\right)'=0$.

Θεωρούμε την $G(x)=\dfrac{f(x)}{\ell nx}$ για την οποία ισχύει το Θ. Rolle στο $[e,e^2]$ (είναι εύκολη η απόδειξη). Άρα υπάρχει $\xi\in(e,e^2)$ ώστε $G'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\ell n\xi^{\xi}=f(\xi)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Στις ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.

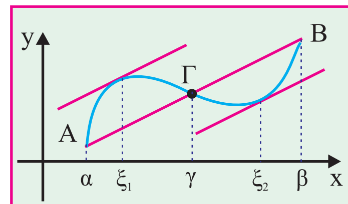
Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Τα ξ_1, ξ_2 προκύπτουν εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλα διαστήματα $[\alpha,\kappa]$, $[\kappa,\beta]$.

Στη συνέχεια αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f' θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.

Παράδειγμα 11

Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f. Αν γνωρίζεται ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την χορδή AB στο $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ με $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ και $\alpha<\gamma<\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.

Λύση



Στο (α,γ) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_1:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\lambda_{A\Gamma}$ (συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ).

Στο (γ,β) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_2:

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\lambda_{\Gamma B}$. Όμως $\lambda_{A\Gamma}=\lambda_{\Gamma B}$ οπότε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$: $f''(\xi)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη ύπαρξης $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu \in (\alpha, \beta)$ που πληρούν μια συγκεκριμένη σχέση.

Εδώ πρόκειται για εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα που προκύπτουν από κατάλληλη διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ η οποία διαμέριση υπαγορεύεται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Στην ειδική περίπτωση που ζητείται ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ και το επιτρέπει το πρόβλημα προχωρούμε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, (το πλάτος $c = \frac{\beta-\alpha}{2}$)

Διαφορετικά από την σχέση των ξ_1, ξ_2 και από τα δεδομένα του προβλήματος θα προχωρήσουμε στην επιλογή του κ για την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \kappa]$, $[\kappa, \beta]$.

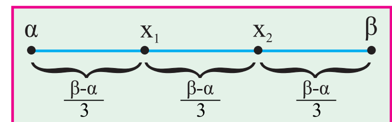
(Το κ δεν είναι πάντα το μέσο του (α, β))

Παράδειγμα 12

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 1$ και $f(\beta) = 2004$. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{6009}{\beta - \alpha}$.

Λύση

Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{3}$.



Προφανώς ισχύει: $x_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3} = \frac{2\alpha+\beta}{3}$,

$$x_2 = \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{3} = \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$. Επομένως υπάρχουν: $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2\alpha+\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (1) \text{ και}$$

$\xi_2 \in (x_1, x_2)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \frac{2\alpha+\beta}{3}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\xi_3 \in (x_2,\beta) \text{ με } f'(\xi_3)=\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{\alpha+2\beta}{3}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) και έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=$$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=\frac{3[f(\beta)-f(\alpha)]}{\beta-\alpha}\overset{\text{υπόθεση}}{=}\frac{3[2004-1]}{\beta-\alpha}=\frac{6009}{\beta-\alpha}.$$

Παράδειγμα 13

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με $f(\alpha)=e$ και $f(\beta)=-e$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\beta-\alpha}{e}$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$.

ii. Θεωρούμε τα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$ σε καθένα από τα οποία για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ.

οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\xi)$ με $f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{0-e}{\xi-\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{\alpha-\xi}{e}$ (1)

Ομοίως υπάρχει $\xi_2\in(\xi,\beta)$ με $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{-e-0}{\beta-\xi}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\xi-\beta}{e}$

οπότε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\alpha-\xi}{e}+\frac{\xi-\beta}{e}=\frac{\alpha-\beta}{e}$.

Παράδειγμα 14

Για τη συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [2002, 2006] ισχύει $2f(2004)=f(2002)+f(2006)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(2002,2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [2002, 2004] και [2004, 2006].

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν : $\xi_1 \in (2002,\ 2004)$ και $\xi_2 \in (2004,\ 2006)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2004 - 2002} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2006 - 2004}$$

$$\text{ή} \quad f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2}$$

Ισχύει : $2f(2004) = f(2002) + f(2006) \Leftrightarrow f(2004) - f(2002) = f(2006) - f(2004)$.

Επομένως είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Η συνάρτηση f΄ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, επομένως από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ δηλαδή $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Απόδειξη ανισοτικών σχέσων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

i. Διπλή ανισοτική σχέση

α. Μετατρέπουμε την ανισότητα σε $K < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \Lambda$

β. Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση f και το διάστημα [α, β]

γ. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ οδηγούμαστε στην ύπαρξη κάποιου

$\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $K < f'(\xi) < \Lambda$.

Η ισχύς της τελευταίας ανίσωσης προκύπτει είτε από απλές πράξεις είτε με χρήση της μονοτονίας της f'.

Παράδειγμα 15

Δείξτε ότι $1 + \frac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1 + \frac{1}{e}$.

Λύση

Είναι $1 + \frac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \ell n(1+e) - 1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \frac{\ell n(1+e) - \ell ne}{(1+e) - e} < \frac{1}{e}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ell nx$ με $x \in [e, 1+e]$. Για την f ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ. .

Οπότε υπάρχει $\xi \in (e, 1+e)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(1+e) - f(e)}{1+e-e} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\ell n(1+e) - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ell n(1+e) - 1$$

Επειδή $\xi \in (e, 1+e)$ είναι $0 < e < \xi < 1+e \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+e} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e} < \ell n(1+e) - 1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$1+\frac{1}{1+e}<\ell n(1+e)<1+\frac{1}{1+e}$.

Παράδειγμα 16

Αν $0<\alpha<\beta$ να δειχθεί ότι: $(\alpha e)^{\beta-\alpha}<\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta e)^{\beta-\alpha}$.

Λύση

Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\ell n\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e)\Leftrightarrow$

$(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e)\Leftrightarrow\ \ell n(\alpha e)<\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e)$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ell nx$, $x\in[\alpha,\beta]$, με $f'(x)=\ell nx+1$.

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow 1+\ell n\xi=\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow \ell n(\xi e)=\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}$

Αλλά $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow \alpha e<e\xi<\beta e\overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow}\ell n(\alpha e)<\ell n(\xi e)<\ell n(\beta e)\Leftrightarrow$

$\ell n(\alpha e)<\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e)\Leftrightarrow(\alpha e)^{\beta-\alpha}<\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta e)^{\beta-\alpha}$ (1)

Παράδειγμα 17

Για κάθε $\kappa>0$ δείξτε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa}\Leftrightarrow\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}\Leftrightarrow\frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{3\kappa}\Leftrightarrow\frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[5]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\kappa,4\kappa]$ με $f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\kappa,\ 4\kappa)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(4\kappa)-f(\kappa)}{4\kappa-\kappa}$, δηλαδή:

$\frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}=\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$ (1). Όμως αφού $0<\kappa<\xi$ θα έχουμε:

$\kappa^4<\xi^4\Leftrightarrow\sqrt[5]{\kappa^4}<\sqrt[5]{\xi^4}\Leftrightarrow\frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}$ και από (1) είναι: $\frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$

Κατηγορία – Μέθοδος 9
Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σ' ένα διάστημα Δ.
Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε διάστημα και για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος η παράγωγος υπάρχει και είναι μηδέν.

Παράδειγμα 18

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x)(x+10)=f(x)$, $x>0$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+10}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.

β. Βρείτε την συνάρτηση f εάν $f(1)=1$.

Λύση

α. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{(x+10)f'(x)-f(x)}{(x+10)^2}\overset{\text{υποθ.}}{=}0$. Άρα $g(x)=c$, $c\in R$.

β. Είναι $g(x)=c \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x+10}=c \Leftrightarrow f(x)=c(x+10)$ με $f(1)=1$ προκύπτει ότι $c=\dfrac{1}{11}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{11}(x+10)$, $x>0$.

Σχόλιο: Εδώ φαίνεται ότι με τη βοήθεια μιας σταθερής συνάρτησης υπολογίζεται ο τύπος μιας άλλης συνάρτησης.

Κατηγορία – Μέθοδος 10
Εύρεση του τύπου συνάρτησης $f(x)$ με την επίλυση εξίσωσης στην οποία υπάρχουν και η $f(x)$ αλλά και η $f'(x)$.
Εκμεταλλευόμενοι κατάλληλα τα συμπεράσματα των παρακάτω προτάσεων

1. Αν $g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$ (Δ διάστημα)

2. Αν $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$ (Δ διάστημα)

3. Αν $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=ce^x$, $x\in\Delta$, $c\in R$.

Παράδειγμα 19

Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)(\kappa-x)=f(x)$, $x\neq\kappa$.

Λύση

Είναι: $f'(x)(\kappa-x)-f(x)=0$ ή $f'(x)(\kappa-x)+(\kappa-x)'f(x)=0$ ή $[f(x)(\kappa-x)]'=0$

Άρα η $g(x)=f(x)(\kappa-x)=c \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{c}{\kappa-x}$ για κάθε $x\neq\kappa$, $c\in R$.

Δίνουμε ένα πίνακα ενδεικτικών παραδειγμάτων

Ζητάμε συνάρτηση f για την οποία ισχύει	**Θεωρούμε συνάρτηση g που από την συνθήκη θα είναι $g'(x)=0$**	**Βρίσκουμε τον τύπο της f**
$f'(x)=cf(x)$ **ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:** $f'(x)=h'(x)\cdot f(x)$	$g(x)=e^{-cx}\cdot f(x)$ $g(x)=e^{-h(x)}\cdot f(x)$	$f(x)=k\cdot e^{cx}$ $f(x)=k\cdot e^{h(x)}$
$f'(x)\cdot(x-c)=f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$	$f(x)=k\cdot(x-c)$
$f'(x)\cdot(c-x)=f(x)$	$g(x)=(x-c)f(x)$	$f(x)=\dfrac{k}{x-c}$
$xf'(x)=v\cdot f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^v}$	$f(x)=k\cdot x^v$

Παρατηρήσεις

α. Στον παραπάνω πίνακα, η k είναι σταθερά η οποία μπορεί να υπολογιστεί αν μας δίνουν επιπλέον πληροφορίες για την f.

β. Το c στις ασκήσεις, μπορεί να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Παράδειγμα 20

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο R με συνεχή παράγωγο και $xf'(x)=3f'(x)+f(x)$ για $x\neq 3$ και $f'(3)=2$. Να βρεθεί η f.

Λύση

Είναι για $x\neq 3$:

$$xf'(x)=3f'(x)+f(x)\Leftrightarrow (x-3)f'(x)=f(x)\Leftrightarrow (x-3)f'(x)-(x-3)'f(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)f'(x)-(x-3)'f(x)}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x-3}\right)'=0\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-3}=c\Leftrightarrow f(x)=c(x-3),\ c\in\mathbb{R},$$

$x\neq 3$ (1). Όμως η f είναι συνεχής στο 3 άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$. Επομένως $f(x)=c(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$. Από (1) έχουμε: $f'(x)=c$ και $f'(3)=2$ οπότε $c=2$. Τότε $f(x)=2(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 21

Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g(0)=100$ (1) και $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ (2)

Λύση

Είναι $συνx \neq 0$ αφού $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και από την (2) έχουμε:

$$\frac{g'(x)συνx + g(x)ημx}{συν^2x} = \frac{g(x)συνx}{συν^2x} \quad ή \quad \frac{g'(x)συνx - g(x)(συνx)'}{συν^2x} = \frac{g(x)}{συνx} \quad ή$$

$$\left(\frac{g(x)}{συνx}\right)' = \left(\frac{g(x)}{συνx}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι αν $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, $x \in R$, $c \in R$.

Έτσι $\frac{g(x)}{συνx} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = ce^x συνx$. Όμως $g(0) = 100 \Leftrightarrow c \cdot e^0 \cdot συν0 = 100 \Leftrightarrow c = 100$.

Άρα $g(x) = 100e^x συνx$, $x \in R$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + βx + γ, & -2 \leq x < 0 \\ αx^2 + 3x + 3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Βρείτε τα $α, β, γ \in R$ ώστε να εφαρμόζεται για την f του Θ. Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2,0) \cup (0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $[-2,0) \cup (0,2]$.

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle η f πρέπει να είναι συνεχής και στο 0

Δηλαδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow γ = 3$ και παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Είναι $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + βx + γ - 3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + βx}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+β)}{x} = β$

και $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{αx^2 + 3x + 3 - 3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(αx+3)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (γx + 3) = 3$ οπότε $β = 3$.

Ακόμη $f(-2) = (-2)^2 + β(-2) + γ = 4 - 2β + γ = 4 - 2 \cdot 3 + 3 = 4 - 6 + 3 = 1$ και

$f(2) = α \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 4α + 6 + 3 = 4α + 9$

Πρέπει $f(-2) = f(2) \Leftrightarrow 1 = 4α + 9 \Leftrightarrow α = -2$. Άρα $(α, β, γ) = (-2, 3, 1)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+4x^2-5x+2$, $x\in R$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$. Να βρείτε το ξ.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι $f(0)=2$ και $f(1)=2$ από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=0$.

Έχουμε $f'(x)=3x^2+8x-5$, $x\in R$. Άρα:

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2+8\xi-5=0\Leftrightarrow \xi_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{124}}{6}\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_1=\dfrac{-8-\sqrt{124}}{6}<0, \text{ (απορρίπτεται)}\\ \xi_2=\dfrac{-8+\sqrt{124}}{6}, \quad \text{(δεκτή)}\end{cases}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\frac{16}{3}x^3-10x^2+8x+2003$, $x\in R$.

Δείξτε ότι $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+16x^2-20x+8$.

Για την συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, διότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο $[0,1]$ και $f'(0)=8$ και $f'(1)=8$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

Άσκηση 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,e]$ με $f(1)=0$ και $f(e)=-1$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=\ell nx+f(x)$, $x\in[1,e]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ με $g'(\xi)=0$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, ℓnx είναι παραγωγίσιμες στο $[1,e]$ άρα και συνεχείς σ' αυτό.

Επίσης $g(1)=\ell n1+f(1)=0+0=0$ και $g(e)=\ell ne+f(e)=1-1=0$.

Ισχύουν για την g οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[1,e]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\alpha+1]$ για την οποία ισχύει $2002\le f'(x)\le 2003$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+1)$. Εάν $f(\alpha)=1$ δείξτε ότι $2003\le f(\alpha+1)\le 2004$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+1)$ εφ'όσον $2002\le f'(x)\le 2003$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ με

$f'(\xi)(\alpha+1-\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha) \Leftrightarrow f'(\xi)=f(\alpha+1)-1$. Όμως $2002 \le f'(x) \le 2003$ για κάθε $x \in (\alpha,\alpha+1)$ οπότε $2002 \le f'(\xi) \le 2003 \Leftrightarrow 2002 \le f(\alpha+1)-1 \le 2003 \Leftrightarrow$ $2003 \le f(\alpha+1) \le 2004$.

Άσκηση 6

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0)=-\frac{1}{e}$ και η συνάρτηση $F(x)=f(x)+e^{-x}$, $x \in [0,1]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

α. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0)=0$.

β. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi)=\frac{1}{e^{\xi}}$.

Λύση

α. Αφού για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle είναι:

$$F(0)=F(1) \Leftrightarrow f(0)+e^{-0}=f(1)+e^{-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{e}+1=f(1)+\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(1)=\frac{e-2}{e}>0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και $f(0)f(1)<0$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β. Για την F ισχύει το Θ. Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με:

$$F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-e^{-\xi}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=e^{-\xi} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{e^{\xi}}.$$

Άσκηση 7

Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x-x^2-x+13=0$ έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x^2-x+13$ οπότε $f'(x)=e^x-2x-1$, $f''(x)=e^x-2$ και $f'''(x)=e^x$. Θεωρούμε ότι η f έχει τέσσερις ρίζες, έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$, οπότε από το Θ. Rolle στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$, $[\rho_3,\rho_4]$ υπάρχουν $\xi_1<\xi_2<\xi_3$ με $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$.

Επίσης από το Θ. Rolle στα $[\xi_1,\xi_2]$, $[\xi_2,\xi_3]$ για την f' υπάρχουν $\kappa_1<\kappa_2$ με $f''(\kappa_1)=f''(\kappa_2)=0$.

Ομοίως από Θ. Rolle για την f'' υπάρχει λ στο $[\kappa_1,\kappa_2]$ με $f'''(\lambda)=0 \Leftrightarrow e^{\lambda}=0$ (άτοπο).

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 8

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει $f'(x)+2xf(x)=e^{x-x^2}$ για κάθε $x\in R$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}f(x)-e^x$ είναι σταθερή για κάθε $x\in R$.

β. Βρείτε την συνάρτηση g εάν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}=-1$.

γ. Να βρείτε την συνάρτηση f.

δ. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ε. Δείξτε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι μοναδική.

Λύση

α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$g'(x)=2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)-e^x=e^{x^2}(2xf(x)+f'(x))-e^x=$$

$$=e^{x^2}e^{x-x^2}-e^x=e^{x^2+x-x^2}-e^x=e^x-e^x=0$$

Οπότε $g'(x)=0$ άρα $g(x)=c$ για κάθε $x\in R$ με $c\in R$.

β. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}$, $x\neq 0$. Οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-1$.

Για $x\neq 0$ είναι $h(x)=\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow xg(x)-\eta\mu x=xh(x)\Leftrightarrow$

$$xg(x)=xh(x)+\eta\mu x\Leftrightarrow g(x)=h(x)+\frac{\eta\mu x}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(h(x)+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}h(x)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=-1+1=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ οπότε $c=0$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=0$.

γ. Έχουμε $g(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}f(x)-e^x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{e^{x^2}}\Leftrightarrow f(x)=e^{x-x^2}$, $x\in R$.

δ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ άρα και συνεχής με $f(0)=f(1)=1$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=0$. Στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ε. Έχουμε $f'(x)=(1-2x)e^{x-x^2}$ οπότε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow(1-2\xi)e^{\xi-\xi^2}=0\Leftrightarrow 1-2\xi=0\Leftrightarrow\xi=\dfrac{1}{2}$.

Το ξ είναι μοναδικό άρα και η παραπάνω εφαπτόμενη μοναδική.

Άσκηση 9

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.
Επίσης $f(2)=2f(1)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$ (1).

Λύση

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'_{x=x_0}=0$$

Θεωρούμε την $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $[1,2]$. Η F παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και συνεχής στο $[1,2]$.

επίσης $F(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$, $F(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{2f(1)}{2}=f(1)$. Άρα $F(1)=F(2)$ και επομένως αυτή πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ ώστε

$$F'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Μοναδικότητα

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα την x_0 με άτοπο.

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες στο $(1,2)$ τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Η (1) γίνεται $xf'(x)-f(x)=0$. Θέτουμε $\Phi(x)=xf'(x)-f(x)$ (2).

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ (διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και συνεχής στο $[1,2]$. Επίσης $\Phi(\rho_1)=\Phi(\rho_2)=0$ (διότι ρ_1,ρ_2, ρίζες της Φ).

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ με $\Phi'(\xi)=0$.

Από (2) έχουμε: $\Phi'(x)=(x)'f'(x)+xf''(x)-f'(x)$.

Άρα $\Phi'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+\xi f''(\xi)-f'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=0$ (διότι $\xi\neq 0$)

άτοπο από υπόθεση διότι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[2,10]$ παραγωγίσιμη στο (2,10) και η f' γνησίως αύξουσα στο (2,10). Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(4)+f(8)$ και $f(2)+f(10)$.

Λύση

Στα διαστήματα $[2,4]$, $[8,10]$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχουν ξ_1,ξ_2 με

$2<\xi_1<4<8<\xi_2<10$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(10)-f(8)}{10-8}$.

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ ή

$\dfrac{f(4)-f(2)}{2}<\dfrac{f(10)-f(8)}{2} \Leftrightarrow f(4)+f(8)<f(2)+f(10)$.

Άσκηση 11

Εάν $f'(e^x)=2xe^{x^2-x}$ για $x>0$ και $f(1)=2$ να βρεθεί το $f(e)$ και ο τύπος της f για $x\in(0,+\infty)$.

Λύση

Είναι: $f'(e^x)=2xe^{x^2-x} \Leftrightarrow f'(e^x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^x} \Leftrightarrow e^x f'(e^x)=2xe^{x^2} \Leftrightarrow (f(e^x))'=(e^{x^2})' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(e^x)=e^{x^2}+c$

Για $x=0$ έχουμε $f(e^0)=e^{o^2}+c$ οπότε $f(1)=1+c \Leftrightarrow 2=1+c \Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(e^x)=e^{x^2}+1$, $x>0$. Για $x=1$ είναι $f(e)=e^{1^2}+1=e+1$. Θέτουμε $y=e^x \Leftrightarrow \ell ny=x$ με $y>0$. Έτσι έχουμε $f(y)=e^{(\ell ny)^2}+1=(e^{(\ell ny)})^{\ell ny}+1=y^{\ell ny}+1$. Άρα $f(x)=x^{\ell nx}+1$, $x>0$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=f'(1)=1$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=2[f(x)]^2+[f'(x)]^2+2000$ είναι σταθερή.

ii. Δείξτε ότι $g(x)=2003$, $x\in R$.

2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) η οποία μηδενίζεται στα σημεία α και β και μόνο σε αυτά. Αποδείξτε ότι για κάθε $c\in R$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=c$.

3. Έστω $f:[0,\pi]\to R$ μια συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\sigma\varphi\xi$.

4. Σε αγώνα κολύμβησης 200m “ελεύθερο”, δύο αθλητές τερματίζουν ταυτόχρονα. Δείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο χρονική στιγμή t_0 που οι δύο αθλητές έχουν την ίδια ταχύτητα κατά τη διάρκεια του αγώνα.

5. Αν $\alpha>\beta>\gamma>3$ δείξτε ότι $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ όπου $f(x)=-x^3+9x^2-x+1$.

6. Έστω $f,g:[0,1]\to R$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$.

7. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ με $f(0)=f(2)=0$ και $g(x)=f(1)(2x-x^2)$.

i. Να δειχτεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία ξ_1, ξ_2 $(\xi_1\neq\xi_2)$ του $(0,2)$ ώστε $g'(\xi_1)=f'(\xi_1)$ και $g'(\xi_2)=f'(\xi_2)$.

ii. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(1)=-\frac{1}{2}f''(\xi)$.

8. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to R$ (με $\alpha>0$) που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$, με $f(0)=\frac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, ώστε $f''(\xi)=0$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R^*\to R$ που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $xf'(x)=(x+1)f(x)$, για κάθε $x\in R^*$ και $f(1)=e$, $f(-1)=\frac{1}{e}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

10. Δείξτε ότι: $|\alpha\eta\mu\alpha-\beta\eta\mu\beta|\leq 2|\alpha-\beta|$ με $0<\alpha<\beta<1$.

11. Έστω η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Αν ισχύει $\alpha^2<3\beta$ να δείξετε ότι έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

(**Υπ.:** Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano και Θ. Rolle για το άτοπο.)

12. Εάν $\kappa+\lambda=-1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2\kappa x+\lambda=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

(**Υπ.:** Στην $F(x)=x^3+\kappa x^2+\lambda x$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle στο [0,1])

13. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R ισχύει για κάθε $x\in R$, $f''(x)\neq 0$, να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης τα οποία είναι συνευθειακά.

(**Υπ.:** Αν υπήρχαν τρια συνευθειακά σημεία Κ, Λ, Μ τότε οι συντελεστές $\lambda_{K\Lambda}=\lambda_{\Lambda M}$. Από τα θεωρήματα Μέσης Τιμής και Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.)

14. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^2 + 3ημx + 4 = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες στο R.

(**Απ.:** Άτοπο με Θεώρημα Rolle.)

15. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ έχει τρεις το πολύ ρίζες πραγματικές.

(**Υπ.:** Πρέπει να δείξουμε ότι $f^{(3)}(x) \neq 0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α.α. Να δείξετε ότι σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις f, g, f΄, g΄ είναι συνεχείς και $f'g - fg' \neq 0$ οι ρίζες των f, g διατάσσονται εναλλάξ.

β. Μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι τέτοια ώστε $f(α) = f(β) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (α, β)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή ξ μεταξύ των α, β για την οποία $f''(ξ) < 0$.

Β. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(x+2) - f(x+1) = \ell n4$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (1, 2)$ στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της f είναι ίση με $\ell nξ + 1$.

Περισσότερες ασκήσεις στο μάθημα αυτό θα βρείτε στο στο τέλος του βιβλίου μετά από τα επαναληπτικά και συνδυαστικά θέματα.



Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα 1

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ , τότε:

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.

Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Σχόλιο

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R και ισχύει :

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ και όχι $f'(x) > 0$.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο , τότε είναι : $f'(x_0) = 0$.

Σχόλια

1. Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης στις ρίζες της f΄.

2. Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος οι ρίζες της f΄ είναι πιθανές θέσεις τ. ακροτάτων για την f.

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα και σε σημεία που δεν είναι ρίζες της f ', όπως στα άκρα του πεδίου ορισμού της (αν είναι κλειστά) και σε σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι ρίζες της f΄ και τα σημεία που η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη λέγονται **κρίσιμα σημεία.**

Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο για να επιβεβαιώνουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση παρουσιάζει τ. ακρότατα.

Αυτό είναι το επόμενο :

Θεώρημα 3

Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α,β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0.

ή με άλλη διατύπωση :

Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α,β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α,β).

Αν $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
f΄(x)	+		–
f	↗	$f(x_0)$ Τοπικό μέγιστο	↘

Αν $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
f΄(x)	–		+
f	↘	$f(x_0)$ Τοπικό ελάχιστο	↗

Αν η f΄ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε:

i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο

ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σύμφωνα με τα παραπάνω βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο αυτής και το πρόσημό της λύνοντας την ανισότητα $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$.

Απο τη λύση των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτουν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

Τα τοπικά ακρότατα, μιας συνάρτησης προκύπτουν απο τα κρίσιμα σημεία εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο η πρώτη παράγωγος. Επίσης τα κλειστά άκρα (αν υπάρχουν) του πεδίου ορισμού της συνάρτησης αποτελούν σίγουρες θέσεις τοπικών ακροτάτων αρκεί η f να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln x$, $x>0$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Είναι $f'(x)=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$, $x>0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και τα μόνα κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου, δηλαδή $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx+1=0 \Leftrightarrow x=1/e$.

Έχουμε $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ και ανάλογα

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1/e$

Έτσι σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών για την f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ Τοπικό ελάχιστο	↗

στον οποίο φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης σε ένα διάστημα (α,β) ή στο πεδίο ορισμού της βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα απο το κεφάλαιο της συνέχειας που αφορά στο σύνολο τιμών.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο : $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$.

Λύση

Είναι $f'(x)=\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$, διότι : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty-\infty=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$

Κατηγορία – Μέθοδος 3
Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα σε ένα διάστημα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο συγκεκριμένο διάστημα και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** σ' αυτό το διάστημα.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x)=\ln x$ **και** $g(x)=\frac{1}{x}$ **αντίστοιχα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$ και θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα.

Είναι $h'(x)=\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς έχει πεδίο τιμών το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$, διότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=(-\infty-\infty)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών που είναι το $(-\infty,+\infty)$ η $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Απο τα παραπάνω λοιπόν συμπαιρένουμε ότι υπάρχει μοναδικό ξ στο $(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4
Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής : $f(x)\geq g(x)$ ή $f(x)\leq g(x)$ θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$ και απο τη μονοτονία και τα ακρότατα της h προκύπτει η ισχύς της προς απόδειξη ανισότητας .

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι : $e^x\geq 1-\ln(x+1)$, για κάθε $x\geq 0$

Λύση

Θέτουμε $h(x)=e^x-1+\ln(x+1)$, $x\geq 0$.

Είναι $h'(x)=\left(e^x-1+\ln(x+1)\right)'=e^x+\frac{1}{x+1}>0$, για κάθε $x\geq 0$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως, αν $x\geq 0$ έχουμε: $h(x)\geq h(0)=0 \Leftrightarrow e^x-1+\ln(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1-\ln(x+1)$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν έχουμε ως προυπόθεση ότι ισχύει μια ανισοτική σχέση όπως για παράδειγμα $f(x)\geq \alpha$ ή $f(x)\leq \alpha$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια παράμετρο, βρίσκουμε x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=\alpha$, οπότε απο τη σχέση $f(x)\geq \alpha=f(x_0)$ ή $f(x)\leq \alpha=f(x_0)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, προκύπτει $f'(x_0)=0$. Απο την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη παράμετρο.

Παράδειγμα 5

Αν $\alpha^x+5^x\geq 2$, για κάθε $x\in \mathbb{R}$ όπου $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{5}$.

Λύση

Αν θέσουμε $f(x)=\alpha^x+5^x$ έχουμε:

$f(x)=\alpha^x+5^x\geq 2=f(0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 2 στη θέση $x=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι: $f'(0)=0$.

Επειδή $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha+5^x\ln 5$ παίρνουμε:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha+5^0\ln 5=0 \Leftrightarrow \ln\alpha+\ln 5=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha 5)=0=\ln 1 \Leftrightarrow \alpha 5=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{5}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται τιμή μιας παραμέτρου ώστε μία συνάρτηση να παρουσιάζει f ακρότατο σε μια θέση, έστω x_0, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει $f'(x_0)=0$. Απο τη συνθήκη αυτή προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Επειδή η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι αναγκαία και όχι ικανή πρέπει να γίνεται επαλήθευση με τον πίνακα μονοτονίας, δηλαδή να ελέγχουμε αν η παράγωγος αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, οπότε το x_0 είναι πράγματι θέση ακρότατου.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\frac{\beta\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=1$ με $f(1)=-2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και αφού το 1 είναι εσωτερικό του διαστήματος $(0,+\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1)=0$.

Έχουμε: $f'(x)=\left(\alpha\sqrt{x}+\frac{\beta\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\alpha x+2\beta-\beta\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x>0$

Άρα $f'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+2\beta-\beta\ln 1}{2}=0 \Leftrightarrow \alpha+2\beta=0$ (1)

Επίσης έχουμε $f(1)=-2 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{1}+\frac{\beta\ln 1}{\sqrt{1}}=-2 \Leftrightarrow \alpha=-2$ (2)

Απο τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

Για τις τιμές αυτές είναι $f'(x)=\frac{2-2x-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x>0$ και πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του 1.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται απο το πρόσημο του αριθμητή, αφού $x>0$.

Θέτουμε $g(x)=2-2x-\ln x$, $x>0$ και θα μελετήσουμε το πρόσημο της g.

Είναι $g'(x)=-2-\frac{1}{x}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, με $g(1)=0$. Οπότε αν $x>1 \Leftrightarrow g(x)<g(1)=0$, ενώ αν $x<1 \Leftrightarrow g(x)>g(1)=0$ που σημαίνει ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 για τις τιμές των α και β που βρήκαμε και μάλιστα παρουσιάζει στη θέση αυτή τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό μέγιστο).

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ell n\frac{1}{x}$, **ii.** $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **iii.** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Λύση

i. Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=(-\ell nx)'=-\frac{1}{x}<0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Επειδή για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$, η συνάρτηση εφx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ οπότε:

- $f'(x) > 0$ στο $(-1,0)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$.
- $f'(x) < 0$ στο $(0,1)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Άσκηση 2

i. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x - ημ^2x$ ορισμένη στο R. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο R.

ii. Όμοια για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x - ημx$ ορισμένη στο R.

Λύση

i. Είναι $f(x) = 2x - ημ^2x$ ορισμένη στο R οπότε

$f'(x) = (2x - ημ^2x)' = 2 - 2ημxσυνx = 2 - ημ2x$, $x \in R$.

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - ημ2x = 0$ ($ημ2x = 2$ αδύνατη στο R)

Είναι $-1 \le ημ2x \le 1$ για κάθε $x \in R$ οπότε $-1 \le -ημ2x \le 1$ για κάθε $x \in R$ και $2-1 \le 2-ημ2x \le 2+1$ για κάθε $x \in R$ ή $1 \le 2-ημ2x \le 3$ για κάθε $x \in R$.

Επειδή $f'(x) = 2 - 2ημx$ δείξαμε ότι $1 \le f'(x) \le 3$, $x \in R$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R (ασφαλώς δεν έχει ακρότατα)

ii. Είναι $g(x) = x - ημx$ ορισμένη στο R οπότε $g'(x) = (x - ημx)' = 1 - συνx$, $x \in R$.

Θέτουμε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = 1 \Leftrightarrow συνx = συν0 \Leftrightarrow x = 2κπ, k \in Z$.

Όμως $συνx < 1 \Leftrightarrow συνx - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - συνx > 0$ για κάθε $x \in R$ με $x \ne 2κπ, k \in Z$.

Έτσι αν και έχουμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$ (άρα άπειρες πιθανές θέσεις ακροτάτων) επειδή $g'(x) > 0$ εκατέρωθεν των λύσεων και η g είναι συνεχής στις θέσεις αυτές η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει βέβαια και ακρότατα.

Άσκηση 3

Για τους διάφορους του μηδέν αριθμούς α, β, γ ισχύει: $3β^2 - 4αγ \le 0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = αx^3 - 3βx^2 + 4γx + 5$, $x \in R$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με: $f'(x) = 3αx^3 - 6βx^2 + 4γ$.

Η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι εξίσωση β΄ βαθμού (ως προς x) και έχει:

$\Delta = 36\beta^2 - 48\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 4\alpha\gamma) \leq 0$ (από υπόθεση)

Αυτό σημαίνει ότι: η εξίσωση $f'(x)=0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες $(\Delta<0)$ ή αν έχει, τότε είναι μία διπλή $(\Delta=0)$, οπότε εκατέρωθεν αυτής η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.
Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=xe^x-\alpha$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να προσδιοριστεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

Λύση

i. Είναι $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Άρα έχουμε για την f τον πίνακα μεταβολών

Η f παρουσιάζει στη θέση $x=-1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο, το $f(-1)=-\frac{1}{e}-\alpha$

ii. Αν $-\frac{1}{e}-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<-\frac{1}{e}$ τότε προφανώς $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Αν $-\frac{1}{e}-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{e}$ τότε η $x=-1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (η ρίζα σε αυτήν την περίπτωση είναι διπλή).

Αν $-\frac{1}{e}-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>-\frac{1}{e}$ τότε:

Στο διάστημα $(-\infty,-1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\alpha>0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $[-1,+\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα με $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συνολικά δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $\alpha>-\frac{1}{e}$.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in R$ με $-1<x<0$ ή $x>0$ ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

Για $-1<x<0$ προφανώς ισχύει $f'(x)<0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1,0]$ είναι η $f(0)=0$ και συνεπώς $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in(-1,0)$ δηλαδή $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Για $x>0$ ισχύει $f'(x)>0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,+\infty)$ είναι η $f(0)=0$ και συνεπώς $f(x)>f(0)$ για κάθε $x>0$ δηλαδή $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x>0$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3+2x-2\eta\mu x$, $x\in R$

α. Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της f.

β. Να βρεθούν τα πρόσημα των συναρτήσεων: f, f ', f '', $f^{(3)}$, όταν $x<0$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-e^x+x$ και $g(x)=x^3+6x^2$. Να αποδείξετε ότι, αν $x\in[-1,2]$, είναι $f(x)<g(x)$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=1-x^2$, $x\in R$.

α. Αποδείξτε ότι το σημείο $M(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ανήκει στη C_g και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο M είναι $\varepsilon: 2(\eta\mu\theta)x+y=1+\eta\mu^2\theta$.

β. Αν η ε τέμνει τη C_f στα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, αποδείξτε ότι:

$x_1\cdot x_2=-2-\eta\mu^2\theta$, $x_1+x_2=-2\eta\mu\theta$ και $y_1+y_2=2+6\eta\mu^2\theta$.

γ. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση φ με τύπο:

$\varphi(\theta)=x_1+x_2+4x_1x_2+y_1+y_2$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ να παρουσιάζει στο $x_1=1$ τοπικό ελάχιστο, το $x_2=-\frac{1}{2}$ να είναι θέση σημείου καμπής και η εφαπτομένη της C_f στο $x_3=0$ να είναι κάθετη της ευθείας $\varepsilon: x-12y=0$.

5. α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+6, & \text{αν } x\le 1\\ 2\sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

β. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x)=3x^3-\alpha x^2+\beta x-3$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στο $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$, να βρεθούν οι αριθμοί α και β.

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

ii. $f''=g''$

iii. $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$.

Να δειχθεί οτι:

α. Για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f(x)-g(x)=cx$, όπου $c\in\Delta$.

β. Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2, τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=x^2+\frac{2\alpha}{x}+\beta$, $(\alpha,\beta\in R)$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=2$.

α. Να βρεθούν τα α και β.

β. Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω οι μιγαδικοί $z_1=\frac{1}{2}$ και $z_2=\frac{1}{x}+i\sqrt{x}$, $(x>0)$ και οι εικόνες τους Α, Β αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο. Να προσδιορίσετε το x έτσι ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι η ελάχιστη.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται τρεις εφαπτόμενες προς την καμπύλη $y=x^3-x$.

Γ. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν ισχύει $2f(x)\ge f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $x\in R$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.



Κυρτότητα
Σημεία καμπής συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

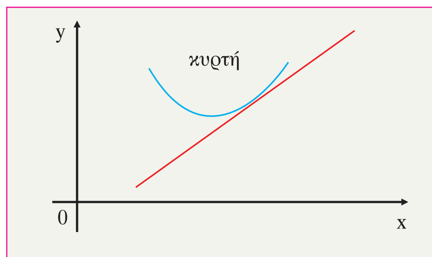
Ορισμοί

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Λέμε ότι :

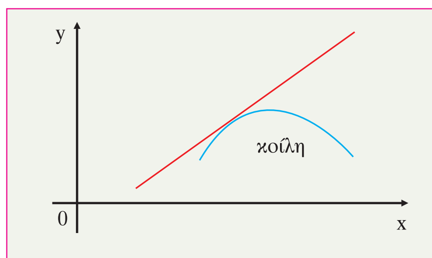
Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα πάνω** στο Δ ή ότι είναι **"κυρτή"** στο Δ αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ ή ότι είναι "κοίλη" στο Δ αν η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Αν η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται "κάτω" από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Αν η f είναι κοίλη τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται "πάνω" από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης αρκεί να εξετάσουμε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Επειδή κριτήριο για τη μονοτονία της f΄ είναι το πρόσημο της f΄΄ διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα :

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f''(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Αν $f''(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

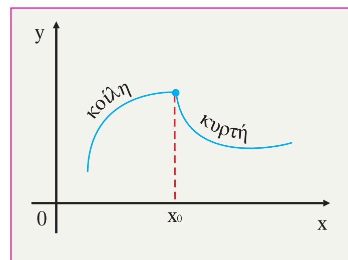
Προσοχή

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν η f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f''(x) > 0$ ή ότι $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ,αντίστοιχα.

Πως ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

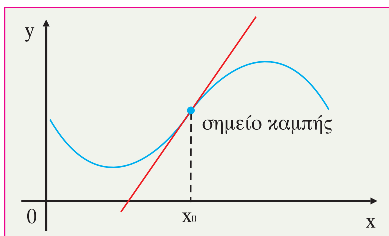
Μια συνάρτηση μπορεί να αλλάζει απο κυρτή σε κοίλη ή απο κοίλη σε κυρτή.

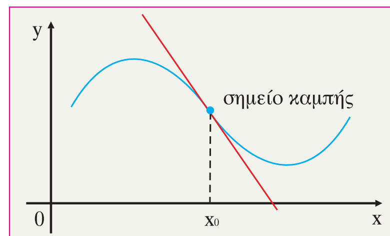
Αν αυτό συμβαίνει σε σημείο που η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη τότε το σημείο αυτό λέγεται **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

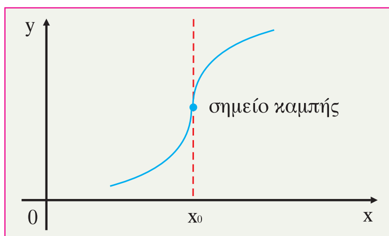


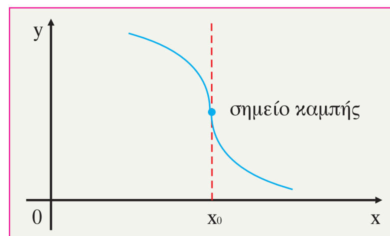
Προσοχή: Εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει η κυρτότητα της f, αλλά δεν είναι σημείο καμπής αφού δεν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f.









Παρατηρούμε ότι στο σημείο καμπής της C_f η εφαπτομένη "διαπερνά" την C_f.

Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x_0)=0$.

Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος, **πιθανά σημεία καμπής** είναι τα σημεία στα οποία **μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος.**

Επίσης απο τα προηγούμενα σχήματα είναι φανερό ότι σημεία καμπής έχουμε και σε σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κατακόρυφη.

Έτσι **πιθανά σημεία καμπής** είναι και τα σημεία στα οποία **δεν υπάρχει η f ΄΄(x)** αλλά η C_f δέχεται εφαπτομένη.

Επομένως για να εντοπίσουμε τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f βρίσκουμε :

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f ΄΄ μηδενίζεται και
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f ΄΄(x).

Είναι σημείο καμπής κάποιο απο τα παραπάνω αναφερόμενα σημεία αν:

Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό και αν
αλλάζει πρόσημο η f ΄΄ εκατέρωθεν του σημείου αυτού.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

i. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

iii. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$.

iv. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της $f''(x)$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο :

$f(x)=\ln(x^2+1)$.

Λύση

Πρέπει $x^2+1>0$, που ισχύει για κάθε $x\in R$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Είναι: $f'(x)=\left(\ln(x^2+1)\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ και

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x)=0$.

Έχουμε $\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 2(1-x^2)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow 1=x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Το πρόσημο της $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ εξαρτάται μόνο από το $1-x^2$, δηλ.

$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-$		$+$		$-$

και έχουμε:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$, κυρτή στο $[-1,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα : $(-1,f(-1))$ και $(1,f(1))$ δηλαδή τα $(-1,\ell n2)$ και $(1,\ell n2)$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} x^3+6x^2-2, & x\le 1 \\ x^3-9x^2+13, & x>1 \end{cases}$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

Για $x<1$ είναι $f'(x)=3x^2+12x$

Για $x>1$ είναι $f'(x)=3x^2-18x$

Στη θέση $x_0=1$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-7}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+7x+7)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+7x+7)=15$ και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-9x^2+13-5}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-9x^2+8}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2-8x-8)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2-8x-8)=-15$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+12x, & x<1\\ 3x^2-18x & x>1\end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

Για $x<1$ είναι $f''(x)=(3x^2+12x)'=6x+12$

Για $x>1$ είναι $f''(x)=(3x^2-18x)'=6x-18$

Άρα $f''(x)=\begin{cases}6x+12, & x<1\\ 6x-18, & x>1\end{cases}$.

Το πρόσημο της $f''(x)$

Για $x<1$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+12=0 \Leftrightarrow x=-2$. Άρα

x	-∞	-2	1
f ''(x)	–	0	+

Για $x>1$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Leftrightarrow x=3$. Άρα

x	1	3	+∞
f ''(x)	–	0	+

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών για την f''.

x	-∞		-2		1		3		+∞
f ''(x)		–	0	+	‖	–	0	+	
f (x)		∩	Σ.Κ.	∪		∩	Σ.Κ.	∪	

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$, είναι κυρτή στο $[-2,1]$, είναι κοίλη στο $[1,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2,f(-2))$ ή $(-2,14)$ και στο $(3,f(3))$ ή $(3,-41)$.

Προσοχή!

Στο $x_0=1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Κατηγορία – Μέθοδος 2
Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής αρκεί να αποδειξουμε ότι η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα 3

Έστω $\alpha \in R$ **και η συνάρτηση** $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2$ **.**
Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής .

Λύση

Η $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2$ επειδή είναι πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με :

$f'(x)=\frac{4}{3}x^3+2\alpha x^2+2\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x+\alpha^3+7$ και

$f''(x)=4x^2+4\alpha x+2\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f''(x)=4x^2+4\alpha x+2\alpha^2-4\alpha+5$

Επειδή η $f''(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το πρόσημό της εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας είναι: $\Delta_x=(4\alpha)^2-16\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right) \Leftrightarrow \Delta=16\alpha^2-16\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)=$
$=-16\left(-\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha+5\right) \Leftrightarrow \Delta=-16\left(\alpha^2-4\alpha+5\right)$

Το τριώνυμο $\alpha^2-4\alpha+5$ έχει $\Delta_\alpha=16-20=-4<0$ οπότε είναι πάντοτε θετικό δηλ. $\alpha^2-4\alpha+5>0$ (ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου). Άρα η $\Delta_x<0$ για κάθε $\alpha\in R$ που σημαίνει ότι είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

Κατηγορία – Μέθοδος 3
Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου α ώστε η f να είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα, τότε ΑΠΑΙΤΟΥΜΕ : $f''(x)\geq 0$ ή $f''(x)\leq 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4

Έστω $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3(4\alpha-3)x^2+1$ **. Να βρεθεί ο πραγματικός α ώστε η f να στρέφει τα κοίλα άνω στο R.**

Λύση

Η f(x) ως πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με :

$f'(x)=8x^3+12\alpha x^2+6(4\alpha-3)x$ και

$f''(x)=24x^2+24\alpha x+6(4\alpha-3)\Leftrightarrow f''(x)=6(4x^2+4\alpha x+4\alpha-3)$.

Για να είναι η f κυρτή στο R πρέπει: $f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$.

Δηλαδή $4x^2+4\alpha x+4\alpha-3\geq 0$ για κάθε $x\in R$

Επειδή είναι τριώνυμο αρκεί να έχει διακρίνουσα $\Delta_x\leq 0$ δηλ.

$16\alpha^2-16(4\alpha-3)\leq 0\Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+3\leq 0\Leftrightarrow 1\leq\alpha\leq 3$. Άρα πρέπει $\alpha\in[1,3]$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε μία συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στο x_0.

Παράδειγμα 5

Έστω $f(x)=2x^2+\alpha\ln x+\beta$ με $x>0$. Υπολογίστε τα α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το Α (1, 5).

Λύση

Είναι $f'(x)=4x+\frac{\alpha}{x}$ και $f''(x)=4-\frac{\alpha}{x^2}$.

Επειδή η f έχει σημείο καμπής στο $x_0=1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ θα ισχύει $f''(1)=0\Leftrightarrow 4-\frac{\alpha}{1}=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=4}$.

Επίσης είναι $f(1)=5\Leftrightarrow 2+\beta=5\Leftrightarrow\beta=3$.

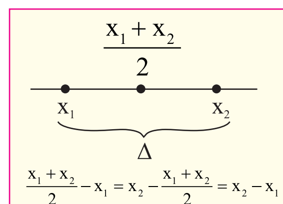
Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων που σχετίζονται με την κυρτότητα συνάρτησης πολλές φορές χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέσης Τιμής όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6

Έστω συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ η οποια στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$.

Λύση



Θεωρούμε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ και τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$

• Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Όμοια εφαρμόζοντας για την f ορισμένη στο $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ το Θ.Μ.Τ. αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Είναι $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$ και επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, οπότε $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ η οποία ανισότητα λόγω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται:

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \text{ ή (επειδή } x_2 - x_1 > 0\text{)}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ ή } f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $f(x) = x \cdot e^x$ **ii.** $f(x) = x^4(12\ln x - 7)$ **iii.** $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3, & \text{αν } x<0 \\ x^3-3x^2+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

(**Απ.: i.** Σ.Κ $(-2, -2e^{-2})$, **ii.** Σ.Κ δεν έχει, **iii.** Σ.Κ $(1,3)$)

2. Έστω $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$

i. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

ii. Να αποδείξετε ότι τα προηγούμενα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(**Απ.: i.** Σ.Κ $\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(3, \frac{1}{4}\right)$)

3. Έστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ να έχει κλίση 2 και το σημείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{21}{4}\right)$ να είναι σημείο καμπής.

(**Απ.:** $\alpha=-1, \beta=3, \gamma=4$)

4. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ και η g τέτοια ώστε ώστε $g(x)\cdot f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 δείξτε ότι η εφαπτομένη της g στο x_0 είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2x+5=0$.

(**Απ.:** Είναι $g'(x_0)=2$)

5. α. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ με $f(x)>0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x),\ x>0$ στρέφει τα κοίλα άνω όταν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)>(f'(x))^2$, για κάθε $x>0$.

β. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

(**Απ.:** **β.** Είναι $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$)

6. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln^2 x+\alpha\ln x+\beta x$ με $x>0$. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x_1=e$ και καμπή για $x_2=e^3$.

(**Απ.:** $\alpha=-4, \beta=2e^{-1}$)

7. Δίνεται η $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $3\alpha^2>8\beta$.

i. Να βρείτε την $f''(x)$.

ii. Να δείξετε ότι η C_f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής.

8. Έστω $f(x)=x^2(x-3)+4$.

i. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f.

ii. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f.

iii. Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της f.

(**Απ.:** **i.** τ.μ. $A(0,4)$, τ.ελ. $B(2,0)$, **ii.** $\Gamma(1,2)$ σημείο καμπής)

9. Έστω $f(x)=\alpha x^3+3x^2+3\beta x+1$ με α, β αντίστροφυς πραγματικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της C_f είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.

(**Απ.:** $\left(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{3}{\alpha}+3\beta\right)$ Σ.Κ., $f'(-1/\alpha)=0$)

10. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

(**Απ.:** Χρησιμοποιείστε Θ. Rolle για την f και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$)

11. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανσότητα: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{\alpha} > \frac{x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha}}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ και $\alpha \in (0,1)$.

12. Ισχύει $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \leq \alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}$ για κάθε $\alpha,\beta > 0$.

13. Δίνεται πραγματική συνάρτησ g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in R$.

(Πανελλήνιες 1997)

14. Αποδείξτε ότι $e^{\alpha} + e^{\beta} \geq 2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ για κάθε $\alpha,\beta \in R$.

15. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανίσωση $\ell n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \geq \ell n\alpha \cdot \ell n\beta$, με $\alpha,\beta > 0$.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $f(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Ονομάζουμε C το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και της εφαπτομένης (ε) της f στο σημείο καμπής της.

Να αποδειχθεί ότι από ένα σημείο Α άγονται τρεις εφαπτομένες προς την καμπύλη $y = f(x)$ όταν και μόνο όταν το Α είναι εσωτερικό σημείο του C.



Κανόνες De l' Hospital

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Πολλές φορές στον υπολογισμό ορίων της μορφής : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ καταλήγουμε σε μια από τις απροσδιόριστες μορφές : $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Η άρση της απροσδιοριστίας γίνεται με τη βοήθεια των δύο επόμενων θεωρημάτων που είναι γνωστά ως **κανόνες de L' Hospital.**

Θεώρημα 1^0 $\left(\textbf{Μορφή } \frac{0}{0}\right)$

Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 χωρίς να είναι αναγκαία παραγωγίσιμες και στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2^0 $\left(\textbf{Μορφή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και f, g είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Τα δύο παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.
- Αν κατά την εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων καταλήξουμε επίσης σε απροσδιόριστη μορφή μπορούμε να τα εφαρμόσουμε όσες φορές απαιτείται αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Απροσδιοριστία της μορφής ($\frac{0}{0}$)

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και παρανομαστή είναι μηδέν.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή.
Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$. Με εφαρμογή του κανόνα (Θεώρημα Hospital) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(3x^2)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-1\right)=1-1=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=1-1=0$.

Άρα $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2xe^{x^2}\right)'}{(\eta\mu x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2+4\cdot 0}{1}=2$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή είναι $\pm\infty$, οπότε έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρανομαστή.
Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)=+\infty$.

Άρα $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+e^x\right)'}{\left(x^2+e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{2x+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(2x+e^x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2+e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Απροσδιοριστία της μορφής ($0\cdot(\pm\infty)$)

Η παραπάνω μορφή έχει προκύψει απο το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.

Γράφουμε $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ και προκύπτει μια απο τις προηγούμενες μορφές.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(2-x^2\right)$.

Λύση

Είναι $$\lim_{x\to-\infty}e^x\left(2-x^2\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{\dfrac{1}{e^x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-x^2\right)'}{\left(\dfrac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-2e^x\right)=0$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty-\infty)$

Προκύπτει απο το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] \overset{(\infty-\infty)}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] \\ \text{ή} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right] \end{cases}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - e^x\right)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - e^x\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x}-1\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x} = 0$ το όριο (1) είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x}-1\right)$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{e^x}-1\right) = 0-1 = -1 < 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Οι απροσδιόριστες μορφές $\left(\left(0^+\right)^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty}\right)$

Προκύπτουν κατά τον υπολογισμό ορίων της μορφής : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ και βρίσκουμε το όριο του εκθέτη δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln\left(f(x)\right)$.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$.

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} x^x \overset{(0^0)}{=} \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x}$. Το όριο του εκθέτη είναι:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to0^+} x = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

Σχόλιο

Ο κανόνας de l' Hospital κάποιες φορές δεν λύνει το πρόβλημα ! Για παράδειγμα:

Είναι $\ell im_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \ell im_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{\left(e^x-e^{-x}\right)'} = \ell im_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \ell im_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)'} = \ell im_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Δηλαδή ξαναβρήκαμε την αρχική συνάρτηση οπότε ο κανόνας δεν εφαρμόζεται.
Με την κλασική μέθοδο του κοινού παράγοντα προκύπτει:

$$\ell im_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \ell im_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)} = \ell im_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Παράδειγμα 6

Έστω η f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε: $f''(0)=\dfrac{3}{2}$, $f(0)=f'(0)=0$ **.**

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ **.**

Λύση

Εφόσον οι $f(x)$ και $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)=0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x)+f(-x)\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x}$.

Επειδή υπάρχει ο αριθμός $f''(0)$ η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο μηδέν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0} f'(-x)=f'(0)=0$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ αλλά δεν εφαρμόζεται κανόνας L' Hospital ,διότι δεν ξέρουμε αν υπάρχει η $f''(x)$ σε μια περιοχή του μηδενός. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f'(x)}{x}-\dfrac{f'(-x)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}$.

Επειδή $f''(0)=\dfrac{3}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x} = \dfrac{3}{2}$

Για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(-x)}{x}$, θέτουμε όπου $-x=\omega$ οπότε $x=-\omega$ και όταν $x\to 0$ και $\omega\to 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(-x)}{x}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f'(\omega)}{-\omega}=-\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f'(\omega)}{\omega}=-\dfrac{3}{2}$.

Τελικά έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f'(x)}{x}-\dfrac{f'(-x)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{3}{2}\right)}{1}=\dfrac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}}{1}=\dfrac{\dfrac{6}{2}}{1}=3$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x+\ln(1+x)}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ **v.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

(**Απ.: i.** 1, **ii.** 0, **iii.** 0, **iv.** $\frac{1}{2}$, **v.** Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας γιατί στη παράγωγο του αριθμητή δεν υπάρχει το όριο του $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και διαιρούμε με x)

2. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{e^x}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\ln x}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$

(**Απ.: i.** 2, **ii.** $+\infty$, **iii.** 0, **iv.** 2, **v.** 1)

3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln^2 x$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-\ln x^2\right)$ **v.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **vi.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$

(**Απ.: i.** 0, **ii.** $-\frac{2}{\pi}$, **iii.** 0, **iv.** $+\infty$, **v.** $+\infty$, **vi.** 1)

4. Έστω $f(x)=\begin{cases} e^{x}-e^{-x}-x, & x\le 0 \\ \dfrac{x-ημx}{xημx}, & x>0 \end{cases}$. Να εξεταστεί η συνέχειά της.

(**Απ.:** Είναι συνεχής)

5. Έστω $f(x)=\begin{cases} 2x-x^{2}, & x\le 1 \\ x-\ln x, & x>1 \end{cases}$. Να βρεθεί η $f'(x)$.

$\left(\textbf{Απ.:} f'(x)=\begin{cases} 2-2x, \ x<1 \\ 1-\dfrac{1}{x}, \ x>1 \\ 0, \ x=1 \end{cases} \right)$

6. Έστω $f(x)=\begin{cases} 2αημx-συνx, & x\le 0 \\ ημ2x+βσυνx, & x>0 \end{cases}$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$(\textbf{Απ.:} α=1, β=-1)$

7. Αν υπάρχει η f'' και είναι και συνεχής να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^{2}}=f''(x).$$

(**Υπ.:** Παραγωγίζουμε με μεταβλητή το h και το x σταθερά στον κανόνα de l' Hospital)

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=0$ και το $f''(0)=2$ να βρεθεί το

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ^{2}x+f(x)}{f(x)+\ln(x+1)}.$$

(**Απ.:** 0)

9. Έστω $f(x)=\begin{cases} α^{x}-β^{x}, & x\le 0 \\ συναx+συνβx, & x>0 \end{cases}$ και $α, β>0$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$.

$\left(\textbf{Απ.:} α=2, β=\dfrac{1}{2} \text{ ή } α=\dfrac{1}{2}, β=2\right)$

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή παράγωγο στο 0 και $f(0)=f'(0)=0$ καθώς και $f''(0)=2003$.

α. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

β. Να βρείτε την $g'(x)$ και να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$.

(**Απ.:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{2003}{2}$, $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{2003}{2}, & x=0\end{cases}$

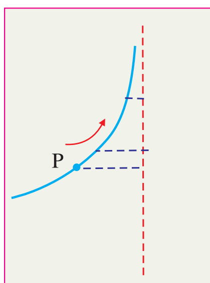
η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$)

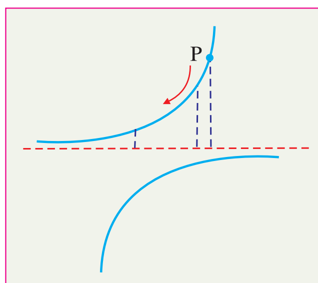
Μάθημα 16

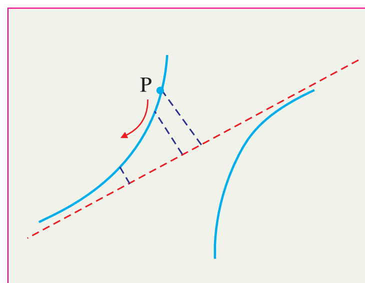
Ασύμπτωτες

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορίζουμε μια ευθεία (ε) ως **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου P της γραφικής παράστασης από την ευθεία (ε) γίνεται απεριόριστα μικρή όταν το P μετακινείται προς το "άπειρο" κινούμενο επί της καμπύλης C_f όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

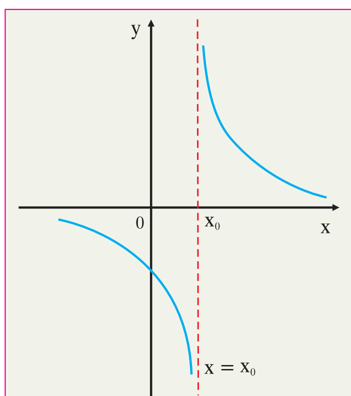


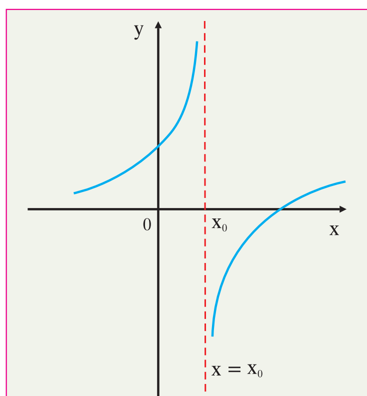




1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

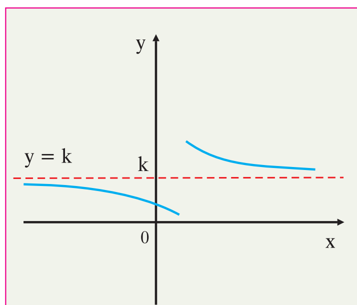
Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

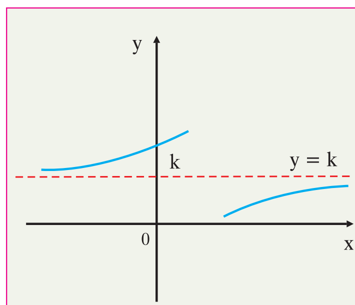




2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=k\in R$ ή $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k\in R$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f την ευθεία $y=k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.





Σχόλιο

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ η $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα.

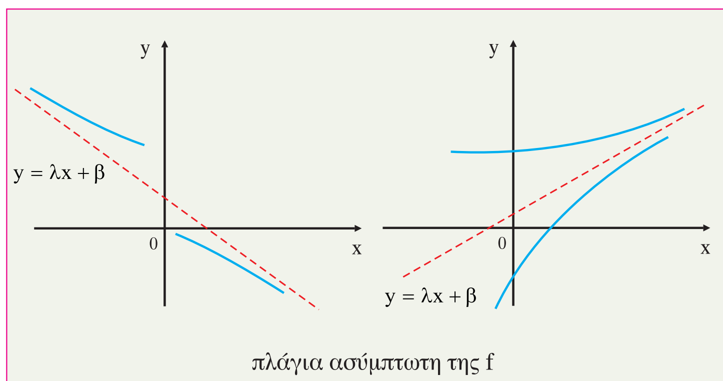
Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ή να έχει την ίδια ευθεία ως ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

3. Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0 \text{ ή } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$$

αντίστοιχα .



πλάγια ασύμπτωτη της f

Σχόλιο

Η ασύμπτωτη είναι οριζόντια αν $\lambda=0$, ενώ είναι πλάγια αν $\lambda\neq 0$.

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f χρησιμοποιούμε το παρακάτω **θεώρημα:**

Θεώρημα

Η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ ή}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ αντίτοιχα.}$$

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα σημεία x_0 που η f δεν είναι συνεχής και στα σημεία x_0 που είναι άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 1

Έστω $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$.Να προσδιορίσετε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=R-\{-1,1\}$.Άρα τις κατακόρυφες ασύμπτωτες θα τις αναζητήσουμε στις θέσεις $x_0=-1$ και $x_0=1$.

Για $x_0=-1$ έχουμε : $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$ οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=-1$.

Για $x_0=1$ έχουμε: $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$ με $\begin{cases}\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty\end{cases}$

οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=1$ την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης

Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε τα όρια: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ (Αρκεί το πεδίο ορισμού της να έχει άκρο το $+\infty$ ή το $-\infty$).

Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια είναι πραγματικός αριθμός , έστω k τότε η ευθεία $y = k$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Παράδειγμα 2

Να προσδιορίσετε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων με τύπους:

i. $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x^2-1}$ **ii.** $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x+1}$

Λύση

i. Επειδή το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$, η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=2$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x+2)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+2}{e^x+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=2$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$, εφ' όσον το $+\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της, κάνουμε τα εξής:

1. Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$.

Αν το λ δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f **δεν** έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το λ είναι πραγματικός αριθμός τότε:

2. Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta$

Αν το β δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f **δεν** έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το β είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση: $y=\lambda x+\beta$.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, αν βεβαίως το $-\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα 3

Έστω $f(x)=\sqrt{x^2-25}$ **με** $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

Να εξετάσετε αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Λύση

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}} = 1 = \lambda$$

και $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-25}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)}{\sqrt{x^2-25}+x} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-25-x^2}{x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-25}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = 1\cdot x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}\right] = -1 = \lambda$$

και $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-25}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)}{\sqrt{x^2-25}-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-25-x^2}{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-25}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Προσοχή

Αν το $\lambda = 0$ και $\beta \in R$ τότε η πλάγια ασύμπτωτη γίνεται της μορφής $y = \beta$ που είναι οριζόντια. Άρα η f δεν μπορεί να έχει στο $+\infty$ συγχρόνως οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη. Ομοίως και για το $-\infty$.

Παρατηρήσεις

1. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δεύτερου δεν έχουν ασύμπτωτες.

2. Στις κλασματικές συναρτήσεις σε κάθε ρίζα του παρονομαστή που δεν είναι ρίζα και του αριθμητή έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης.

Ειδικότερα στις ρητές συνάρτησεις:

α. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή τότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

β. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \frac{\alpha_v}{\beta_v}$ όπου α_v, β_v είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή αντίστοιχα.

γ. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος τουλάχιστον κατά δύο από το βαθμό του παρανομαστή η συνάρτηση δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

3. Μία πλάγια ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της f.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}$**. Δείξτε ότι η** $y=2x-3$ **είναι πλάγια ασύμπτωτη της** C_f **στο** $+\infty$ **.**

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-3)\right]=0$.

Πράγματι είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}-(2x-3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}-2x+3\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+7-2x^2+5x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$

Άρα η C_f έχει την $y=2x-3$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Άσκηση 2

Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}$ **με** $\alpha\neq 0$ **. Να βρεθούν τα** $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$ **ώστε η** C_f **να έχει την** $y=\beta x-4$ **με** $\beta\neq 13$ **πλάγια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ **.**

Λύση

Ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\beta x\right)=-4$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{3x^2}=\dfrac{\alpha}{3}$.

Έχουμε $\dfrac{\alpha}{3}=\beta\Leftrightarrow \boxed{\alpha=3\beta}$ (1) και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3\beta x^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\beta x^2-13x+6-3\beta x^2+\beta x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\beta-13)+6}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\beta-13)}{3x}=\dfrac{\beta-13}{3}$

έχουμε $\dfrac{\beta-13}{3}=-4\Leftrightarrow \beta-13=-12\Leftrightarrow \beta=1$ και λόγω της (1) $\alpha=3$.

Άσκηση 3

Αν η $y=3x+6$ **είναι ασύμπτωτη της** C_f **στο** $+\infty$ **,να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ **.**

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=6$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-3x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{6}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{6}{2}=3$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+x+1}$

(**Απ.: i.** $x=1,\ x=2$, **ii.** $x=3,\ x=2$, **iii.** δεν υπάρχει)

2. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$ **ii.** $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-1}{x+2}$

(**Απ.: i.** στο $+\infty$, $y=2$, στο $-\infty$, δεν έχει, **ii.** δεν έχει , **iii.** $y=3$ στο $+\infty$)

3. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2+3x+4}$ **ii.** $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)+x$ **iii.** $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

(**Απ.: ii.** $y=2x+6$ στο $\pm\infty$, **ii.** $y=2x$ στο $\pm\infty$, **iii.** $y=x+2$, στο $+\infty$, $y=-x-2$, στο $-\infty$)

4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες (κατακόρυφες, οριζόντιες, πλάγιες) αν υπάρχουν των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=\dfrac{3x^3+x+2}{x^2}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ **iii.** $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+x}$

(**Απ.: i.** $x=0$ κατακόρυφη $y=3x$ πλάγια στο $\pm\infty$ οριζόντια δεν έχει, **ii.** $x=1$ κατακόρυφη $y=0$ οριζόντια στο $+\infty$, **iii.** δεν έχει κατακόρυφη $y=-2$ στο $+\infty$ $y=2$ στο $-\infty$)

5. Να αποδείξετε ότι η $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της $f(x) = xe^{1/x}$ στο $+\infty$.

6. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η $y = 2x + 3$ να είναι ασύμπτωτη της $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 - \beta x + \alpha}$ στο $+\infty$ με $\alpha > 0$.

(**Απ.:** $\alpha = 4,\ \beta = -12$)

7. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(x) - g(x) = x - 4$, για κάθε $x \in R$ και η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 3x - 7$ τότε:

α. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$

β. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

γ. Να βρεθεί αν υπάρχει η πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

(**Απ.: α.** 2, **β.** $-\dfrac{5}{7}$, **γ.** $y = 2x + 3$)

8. Αν η $y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - x\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2}{xf(x) - 2x^2}$.

$\left(\textbf{Απ.: } \dfrac{1}{2}\right)$

9. Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι ασύμπτωτη της C_f μιας περιττής συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

(**Απ.:** $y = \lambda x - \kappa$)

10. Αν για την f ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + 2x}{xf(x) - x^2} = 1$ να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(**Απ.:** $y = x + 3$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Αν η f είναι μία μη σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση να δειχθεί ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{xf(x) + c}{f(x)}$ με $c \neq 0$ η οποία δεν τέμνει την καμπύλη $y = h(x)$.



Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η διαδικασία με την οποία προσδιορίζουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης ονομάζεται **μελέτη συνάρτησης**.
Αυτή συνίσταται στα εξής βασικά βήματα:

1. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$.
2. Ελέγχουμε την περιοδικότητα της f και τις "συμμετρίες" της γραφικής παράστασης C_f.
3. Εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια.
4. Προσδιορίζουμε τις f' και f'' και βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f, τα διαστήματα κυρτότητας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.
5. Υπολογίζουμε τα όρια στα άκρα όλων των ανοικτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f και προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
6. Προσδιορίζουμε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
7. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f όπου σημειώνουμε το πρόσημο των $f'(x)$ και $f''(x)$ και τα όρια που υπολογίσαμε.
8. Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε προσεγγιστικά την γραφική παράσταση της f.

Β. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$, και είναι συνεχής στο R.

Είναι $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - (3x)' + 2' = 3x^2 - 3$,

$x \in A$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	-∞		-1		1		+∞
f΄(x)		+	0	−	0	+	

Επίσης $f''(x) = (3x^2 - 3)' = (3x^2)' - 3' = 6x$, για κάθε $x \in A$
με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-∞		0		+∞
f΄΄(x)		−	0	+	

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Ακρότατα

Στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατες τιμές.

Ειδικότερα στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 4$ και στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty,0)$ είναι $f''(x) < 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0,+\infty)$

Σημεία καμπής

Στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει καμπή με Σ.Κ. το $A(0,f(0))$ δηλαδή το $A(0,2)$.

Ασύμπτωτες: Δεν υπάρχουν αφού η f είναι πολυωνυμική.

Σημεία τομής με τους άξονες

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 2$ οπότε η C_f τέμνει τον yy΄ στο $A(0,2)$.

Για $y = 0$ είναι $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow$

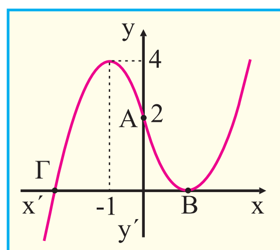
$x = 1$ ή $x = 1$ ή $x = -2$ οπότε η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο $B(1,0)$ και τον τέμνει στο $\Gamma(-2,0)$.

Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	-∞		-1		0		1		+∞
f΄(x)		+	○	−		−	○	+	
f΄΄(x)		−		−	○	+		+	
f	(-∞)	↗	4 Τ.Μ.	↘	2 Σ.Κ.	↘	0 Τ.Ε.	↗	(+∞)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$**.**

Λύση

Η f έχει πεδίο ορίσμου $A=R-\{x\in R: x-1=0\}=R-\{1\}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$ για κάθε $x\in A$.

Είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in A$ και

$$f''(x)=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}$$ για κάθε $x\in A$.

Επίσης έχουμε $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in A$ και

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6(x-1)^3>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$

Μονοτονία της f

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$, είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για το $(1,+\infty)$.

Ακρότατα: Δεν υπάρχουν αφού η f' δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $f''(x)<0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,1)$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$.

Σημεία καμπής: Δεν υπάρχουν αφού στο $x_0=1$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

Ασύμπτωτες

α. Είναι
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x)&=\lim_{x\to1^-}\frac{2x+1}{x-1}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+} f(x)&=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty\end{aligned}\right\}$$
Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.

β. Επίσης $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f, στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες

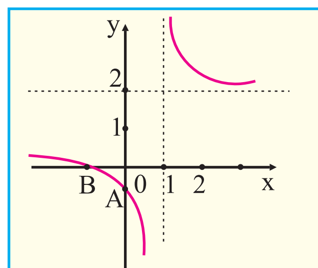
Για $x=0$ είναι $f(0)=-1$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-1)$.

Για $y=0$ είναι $\frac{2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

Πίνακας Μεταβολών

x	-∞		1		+∞
f΄(x)		−	‖	−	
f΄΄(x)		−	‖	+	
f	(2)	↘ (-∞)	‖	(+∞) ↘	(2)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 3

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R-\{x\in R: x-2=0\}=R-\{2\}$.

Είναι $f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{x-2}\right)'=\frac{(x^2+3)'\cdot(x-2)-(x^2+3)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2}=$

$=\frac{2x^2-4x-x^2-3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$, για κάθε $x\in R-\{2\}$

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-3 \Leftrightarrow x_1=2-\sqrt{7}$ ή $x_2=2+\sqrt{7}$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	-∞		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		+∞
f΄(x)		+		−	‖	−		+	

Είναι $f''(x)=\left[\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}\right]'=\frac{(x^2-4x-3)'(x-2)^2-(x^2-4x-3)[(x-2)^2]'}{(x-2)^4}=$

$=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-3)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{2(x-2)[(x-2)^2-(x^2-4x-3)]}{(x-2)^4}=$

$=\frac{2(x-2)(x^2-4x+4-x^2+4x+3)}{(x-2)^4}=\frac{2\cdot 7}{(x-2)^3}=\frac{14}{(x-2)^3}$, για κάθε $x\in A=R-\{2\}$.

Είναι φανερό ότι $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A = R - \{2\}$
Είναι: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 14(x-2)^3 > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2-\sqrt{7}]$

Για κάθε $x \in (2-\sqrt{7}, 2)$ ή $(2, 2+\sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[2-\sqrt{7}, 2)$, $(2, 2+\sqrt{7}]$.

Για κάθε $x \in (2+\sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2+\sqrt{7}, +\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (2-\sqrt{7}, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ έπεται ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2-\sqrt{7}$ τοπικό μέγιστο το $f(2-\sqrt{7}) = 4-2\sqrt{7}$. Επίσης για κάθε $x \in (2, 2+\sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2+\sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2+\sqrt{7}$ τοπικό ελάχιστο το $f(2+\sqrt{7}) = 4+2\sqrt{7}$.

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2)$ είναι $f''(x) < 0$, η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2)$.

Επειδή για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$, η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$.

Σημεία καμπής

Εκατέρωθεν του $x_0 = 2$ αλλάζει πρόσημο η f'' αλλά στο σημείο αυτό η f δεν παρουσιάζει καμπή αφού $2 \notin A$.

Ασύμπτωτες

α.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3}{x-2} = +\infty \end{array}\right\}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στα $+\infty$ και $-\infty$ διότι:

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-2x} = 1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$$

Σημεία τομής της C_f με τους άξονες

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=-\dfrac{3}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$.

Για $y=0$ έχουμε $\dfrac{x^2+3}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2+3=0$, (αδύνατη). Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

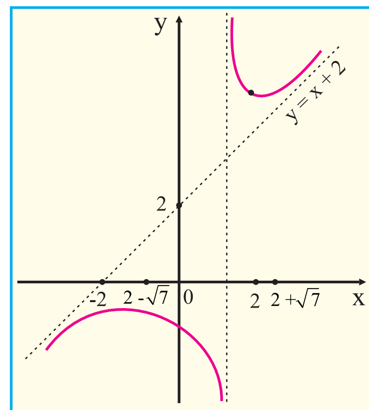
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=+\infty$$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f''(x)$		−		−	‖	+		+	
f	$(-\infty)$	↗	$4-2\sqrt{7}$	↘ $(-\infty)$	‖	$(+\infty)$ ↘	$4+2\sqrt{7}$	↗	$(+\infty)$
			Τ.Μ.				Τ.Ε.		

Γραφική παράσταση



Άσκηση 4

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R-\{x\in R: x(x-1)=0\}=R-\{0,1\}$

Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)'=-\dfrac{(x^2-x)'}{(x^2-x)^2}=-\dfrac{2x-1}{(x^2-x)^2}$, για κάθε $x\in A=R-\{0,1\}$

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	

Επίσης $f''(x)=\left[\dfrac{1-2x}{(x^2-x)^2}\right]'=\dfrac{(1-2x)'(x^2-x)^2-(1-2x)\left[(x^2-x)^2\right]'}{(x^2-x)^4}=$

$$=\frac{-2(x^2-x)^2-(1-2x)2(x^2-x)(x^2-x)'}{(x^2-x)^4}=\frac{-2(x^2-x)^2-(1-2x)2(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x)^4}=$$

$$= \frac{-2(x^2-x)[(x^2-x)-(2x-1)^2]}{(x^2-x)^4} = \frac{-2(x^2-x)(x^2-x-4x^2-1+4x)}{(x^2-x)^4} =$$

$$= \frac{-2(-3x^2+3x-1)}{(x^2-x)^3} = \frac{2(3x^2-3x+1)}{(x^2-x)^3}, \text{ για κάθε } x \in A = R-\{0,1\}$$

Η $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3x+1=0$ που είναι αδύνατη στο $R-\{0,1\}$ οπότε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

Για το πρόσημο της f'' έχουμε:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2(3x^2-3x+2)(x^2-x)^3>0 \Leftrightarrow x^2-x>0 \Leftrightarrow$
$x(x-1)>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$ και $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

x	-∞	0		1	+∞
f´´(x)	+	‖	−	‖	+

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty,0)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

Για κάθε $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=\frac{1}{2} \in A$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty,0)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0)$

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f''(x)<0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,1)$

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$

Σημεία καμπής

Εκατέρωθεν των σημείων $x=0$ και $x=1$ αλλάζει πρόσημο η f''. Επειδή όμως τα σημεία 0 και 1 δεν ανήκουν στο A η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x(x-1)}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(x-1)}=-\infty$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(x-1)}=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(x-1)}=+\infty$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x(x-1)}=0$. Η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , στα $+\infty$ και $-\infty$.

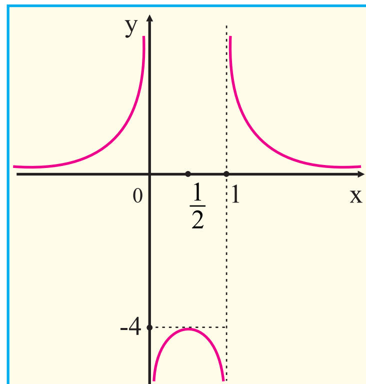
Σημεία τομής με τους άξονες

Δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες αφού στο $x_0=0$ η f δεν ορίζεται ενώ για $y=0$ προκύπτει αδύνατη εξίσωση.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f΄(x)		+	‖	+	o	−	‖	−	
f΄΄(x)		+	‖	−		−	‖	+	
f	(0)	↗	(+∞) ‖ (-∞)	↗	-4 Τ.Μ.	↘	(-∞) ‖ (+∞)	↘	(0)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 5

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^x$.

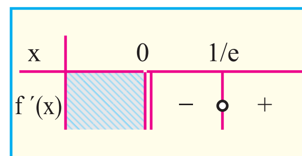
Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=\{x\in R: x>0\}=(0,+\infty)$

Είναι $f'(x)=(x^x)'=(e^{x\ell nx})'=e^{x\ell nx}(x\ell nx)'=e^{x\ell nx}\left[(x)'\ell nx+x(\ell nx)'\right]=$

$=x^x\left(\ell nx+x\dfrac{1}{x}\right)=x^x(\ell nx+1)$.

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx+1=0 \Leftrightarrow \ell nx=-1 \Leftrightarrow \ell nx=\ell n\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$



Είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ell nx>-1 \Leftrightarrow \ell nx>\ell n\frac{1}{e} \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Επίσης $f''(x)=[x^x(\ell nx+1)]'=[e^{x\ell nx}(\ell nx+1)]'=(e^{x\ell nx})'(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}(\ell nx+1)'=$

$=e^{x\ell nx}(x\ell nx)'(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}\frac{1}{x}=e^{x\ell nx}(\ell nx+1)(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}\frac{1}{x}=$

$=e^{x\ell nx}\left[(\ell nx+1)^2+\frac{1}{x}\right]=e^{x\ell nx}\frac{x(\ell nx+1)^2+1}{x}=x^x\frac{x(\ell nx+1)^2+1}{x}$, για κάθε $x\in A$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in A=(0,+\infty)$ είναι $f''(x)\neq 0$ και μάλιστα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in A$.

Μονοτονία της f

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ η f παρουσιάζει στο $x_0=\frac{1}{e}\in A$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$

Σημεία καμπής

Δεν υπάρχουν διότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)=A$.

Ασύμπτωτες

Δεν υπάρχουν.

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ell nx} = 1$ διότι:

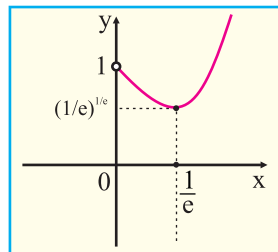
$$\lim_{x\to 0^+} x\ell nx = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 .$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	0		1/e		+∞
f΄(x)		−	0	+	
f΄΄(x)		+		+	
f	(1)	↘	Τ.Ε. $((1/e)^{1/e})$	↗	(+∞)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 6

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες.

Λύση

Έχουμε: $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$

για κάθε $x \in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

Προφανώς κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν διότι η f είναι συνεχής στο R. Χρησιμοποιώντας γνωστό κριτήριο εξετάζουμε την ύπαρξη πλαγίων ή οριζοντίων ασυμπτώτων:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x x(1 + e^{-2x})} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Ομοίως βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Συνεπώς οι ευθείες $y = 1$ και $y = -1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντιστοίχως.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\ell nx}{x^\nu}$ όπου $\nu \in N^* - \{1\}$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα , τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

Λύση

$A_f = (0,+\infty)$. Είναι $f'(x) = \dfrac{x^{v-1} - vx^{v-1}\ell nx}{x^{2v}} = \dfrac{1 - v\ell nx}{x^{v+1}}$.

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ell nx = \dfrac{1}{v} \Leftrightarrow x = e^{1/v}$. Επομένως το $x = e^{1/v}$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{v}}$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{v}}$.

Επίσης $f''(x) = \dfrac{-vx^v - (v+1)x^v(1 - v\ell nx)}{x^{2v+2}} = \dfrac{x^v[-(2v+1) + v(v+1)\ell nx]}{x^{2v+2}} =$

$\dfrac{v(v+1)\ell nx - (2v+1)}{x^{v+2}}$. Έχουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ell nx = \dfrac{2v+1}{v(v+1)} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$.

Επίσης $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$. Άρα στο σημείο "θέση" $x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$ παρουσιάζει καμπή.

Σχετικά με τις ασύμπτωτες έχουμε:

• **Οριζόντιες - πλάγιες ασύμπτωτες**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell nx}{x^{v+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)'}{(x^{v+1})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(v+1)x^{v+1}} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell nx}{x^v} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)'}{(x^v)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{vx^v} = 0.$$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

• **Κατακόρυφες ασύμπτωτες:**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell nx}{x^v} = \lim_{x\to 0^+} \ell nx \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^v} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

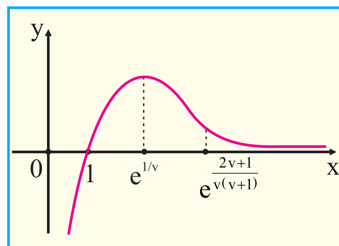
Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	0		$e^{1/v}$		$e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	
$f''(x)$		−		−	0	+	
f		↗		↘		↘	

(Είναι $e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}} > e^{1/v}$ διότι $\dfrac{2v+1}{v(v+1)} > \dfrac{1}{v}$ και η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση). Έτσι στη θέση $x = e^{1/v}$ η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο ενώ στη θέση $x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$ η f παρουσιάζει καμπή.

Με βάση τον πίνακα αυτό σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f:



Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{(2x+8)(x-3)}{x^2-9}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Να σχεδιαστεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f (χωρίς να γίνει αναφορά στον τύπο της) η οποία να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες $y=1$, $y=2$ και

α. Κανένα ακρότατο, **β.** Ένα τοπικό ακρότατο
γ. Δύο τοπικά ακρότατα **δ.** Τρία τοπικά ακρότατα

4. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις:

1. $f(x)=2x^2-4x+3$ **2.** $f(x)=xe^x$ **3.** $f(x)=e^{-\ell n|x-1|}$
4. $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ **5.** $f(x)=\frac{|x-1|}{1-|x|}$ **6.** $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2}$
7. $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$ **8.** $f(x)=συν^2x$

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για δύο αντίθετες τιμές του x οι οποίες και να προσδιοριστούν.
Στη συνέχεια να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης και η γραφική της παράσταση.

(**Απ.:** Οι τιμές του $x=\pm1$)

6. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{2}\ell n\frac{1+x}{1-x}$.
Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;
Να καθοριστεί η αντίστροφη της f (η f^{-1}) και το σύνολο τιμών της αντίστροφης. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.
Τέλος να αποδειχθεί η σχέση: $f^{-1}(x)<|x|<f(x)$ για κάθε $x\in(-1,1)$ και να ερμηνευθεί γεωμετρικά με βάση τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

7. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x}{x-\ell nx}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Στη συνέχεια, αφού αποδειχθεί ότι $\frac{x}{x-\ell nx}\le x$ για κάθε $x>0$, να ερμηνευθεί γεωμετρικά η ανισότητα αυτή με βάση τη γραφική παράσταση της f.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. Να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{x^3}{3-x^2}=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

10. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{2+\eta\mu x}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

α. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}$ **β.** $g(x)=e^{1/x}$

Β. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων $f(x)=\lambda$ και $g(x)=\mu$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda,\mu \in R$.

3ο Κεφάλαιο

18ο μάθημα

Αόριστο ολοκλήρωμα
Μέθοδοι ολοκλήρωσης

19ο μάθημα

Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης
Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

20ο μάθημα

Εμβαδόν



Αόριστο Ολοκλήρωμα
Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ονομάζουμε **αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f** στο Δ, μια συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ, για την οποία ισχύει: $F'(x)=f(x)$, $x\in\Delta$.

Θεώρημα

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$ είναι παράγουσες της f στο Δ, $c\in R$ και αντίστροφα: κάθε παράγουσα $G(x)$ της f θα έχει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in R$$

Ορισμός

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f το ονομάζουμε **ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ** της f στο Δ και το συμβολίζουμε με $\int f(x)dx$.

Η διαδικασία εύρεσης της παράγουσας μιας συνάρτησης ονομάζεται **ολοκλήρωση** της συνάρτησης.

Συνέπεια του ορισμού είναι η ιδιότητα $\int f'(x)dx=f(x)+C$, $c\in R$ και ο επόμενος πίνακας Αορίστων ολοκληρωμάτων.

Πίνακας Αόριστων Ολοκληρωμάτων		
$\int 0dx=c,\ c\in R$	$\int cdx=cx+c_1$	$\int \frac{1}{x}dx=\ell n\lvert x\rvert+c,\ c\in R$
$\int \alpha x^{v}dx=\alpha\frac{x^{v+1}}{v+1}+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c,\ c\in R$	$\int e^x dx=e^x+c,\ c\in R$
$\int συνxdx=ημx+c,\ c\in R$	$\int ημxdx=-συνx+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{συν^2x}dx=εφx+c,\ c\in R$
$\int \frac{1}{ημ^2x}dx=-σφx+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c,\ c\in R$	$\int \alpha^x dx=\frac{\alpha^x}{\ell n\alpha}+c,\ c\in R$

Αναφέρουμε τις ιδιότητες αορίστων ολοκληρωμάτων

1. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \lambda \in R^*$

2. $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx\ ,\ \lambda, \mu \in R^*$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Μέθοδος τωνπαραγουσών
2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
3. Μέθοδος της αντικατάστασης

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Η διαδικασία που ακολουθούμε στην εύρεση της παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης καθορίζεται από τον τύπο της και ακολουθούμε την “Μέθοδο των παραγουσών” όταν οι συναρτήσεις μας επιτρέπουν με απλούς συλλογισμούς χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και τους κανόνες παραγώγισης να καταλήξουμε στην παράγουσα F της f.
Η παραγώγιση της F θα επαληθεύσει το αποτέλεσμα.

Όσα ακολουθούν είναι εφαρμογή του τύπου
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int [F(g(x))]' dx = F(g(x)) + c,\ c \in R$ όπου $F' = f$

Πίνακας Βασικών Αόριστων Ολοκληρωμάτων

Α. $\int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1,\ c \in R$

- $\int (3x-1)^{28} dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{28}(3x-1)' dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{29}}{29} + c,\ c \in R$

- $\int (x^2+6x+10)^{100}(x+3)dx = \int (x^2+6x+10)^{100}\dfrac{(x^2+6x+100)'}{2}dx$
$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+6x+10)^{101}}{101} + c,\ c \in R$

- $\int \eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x dx = \int (\eta\mu^5 x)(\eta\mu x)' dx = \dfrac{\eta\mu^6 x}{6} + c,\ c \in R$

- $\int \dfrac{\ell nx}{x} = \int \left(\dfrac{1}{x}\right)\ell nx dx = \int (\ell nx)' \cdot \ell nx dx = \dfrac{\ell n^2 x}{2} + c,\ c \in R$

- $\int x\sqrt[3]{x^2+1} = \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\dfrac{(x^2+1)'}{2}dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \dfrac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c,\ c \in R$

- $\int \frac{x}{\sqrt[\nu]{x^2+3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)'(x^2+3)^{-\frac{1}{\nu}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+3)^{-\frac{1}{\nu}+1}}{-\frac{1}{\nu}+1}+c = \frac{\nu}{2(\nu-1)}(x^2+3)^{\frac{\nu-1}{\nu}}+c,\ c\in R$

B. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ell n|f(x)|+c,\ c\in R$

- $\int \frac{1}{5-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(5-2x)'}{5-2x}dx = -\frac{1}{2}\ell n|5-2x|+c,\ c\in R$
- $\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\ell n|\sigma\upsilon\nu x|+c,\ c\in R$
- $\int \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{(x^4+3x^2+1)'}{x^4+3x^2+1}dx = \ell n|x^4+3x^2+1|+c,\ c\in R$

Γ. $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)}+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^{\sqrt{x}}2(\sqrt{x})'dx = 2\int e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2e^{\sqrt{x}}+c,\ c\in R$

Δ. $\int \eta\mu f(x)f'(x)dx = -\sigma\upsilon\nu f(x)+c,\ c\in R$	$\int \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx = \eta\mu f(x)+c,\ c\in R$

- $\int \eta\mu(x^2+6x)(2x+6)dx = -\sigma\upsilon\nu(x^2+6x)+c,\ c\in R$
- $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ell nx)}{x}dx = \int [\sigma\upsilon\nu(\ell nx)](\ell nx)'dx = \eta\mu(\ell nx)+c,\ c\in R$

E. $\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}dx = \varepsilon\varphi(f(x))+c,\ c\in R$	$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}dx = -\sigma\varphi(f(x))+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu^2(e^x)}dx = \varepsilon\varphi(e^x)+c,\ c\in R$
- $\int \frac{1}{x\eta\mu^2(\ell nx)} = \int \frac{(\ell nx)'}{\eta\mu^2(\ell nx)} = -\sigma\varphi(\ell nx)+c,\ c\in R$

Z. $\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)+c,\ c\in R$,	
$\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)}+c,\ c\in R$	$\int e^x(f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}dx = \int \frac{(x)' e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \int \left(\frac{x}{e^x}\right)' dx = \frac{x}{e^x} + c,\ c \in R$
- $\int e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx = \int \left((e^x)' \eta\mu x + e^x(\eta\mu x)'\right)dx = \int (e^x \eta\mu x)' dx = e^x \eta\mu x + c,\ c \in R$

Η. Ανάλυση σε απλά κλάσματα.
Όταν έχουμε να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης η οποία δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ και των οποίων ο παρονομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι μικρότερου βαθμού από τον παρανομαστή τότε κάνουμε διάσπαση του κλάσματος όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3}dx$, $x \in R - \{1,3\}$.

Λύση

Είναι $\frac{x+4}{x^2-4x+3} = \frac{x+4}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3)+\beta(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha x - 3\alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x-3)} =$

$= \frac{(\alpha+\beta)x - 3\alpha - \beta}{(x-1)(x-3)}$ οπότε πρέπει: $(\alpha+\beta)x - 3\alpha - \beta = x + 4$ για κάθε $x \in R - \{1,3\}$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ -3\alpha-\beta &= 4 \end{aligned}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: $-2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{2}$ οπότε

$-\frac{5}{2} + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{2}$.

Έτσι: $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3}dx = \int \left(\frac{-\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{7}{2}}{x-3}\right)dx = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}dx =$

$-\frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln|x-3| + c,\ c \in R$.

Θ. Για να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα κλάσματος του οποίου ο παρανομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του βαθμού του παρανομαστή τότε κάνουμε πρώτα διαίρεση και μετά διάσπαση.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3-4x+5}{x^2-3x+2}dx$.

Λύση

Κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-4x+5 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2-2x & x+3 \\ \hline 3x^2-6x+5 & \\ -3x^2+9x-6 & \\ \hline 3x-1 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3-4x+5=\left(x^2-3x+2\right)(x+3)+3x-1 \quad (1)$$

Είναι $\int \frac{x^3-4x+5}{x^2-3x+2}dx \overset{(1)}{=} \int \frac{(x+3)\left(x^2-3x+2\right)+3x-1}{x^2-3x+2}dx =$

$$=\int \frac{(x+3)\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-3x+2}dx+\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx = \int xdx+3\int dx+\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}+3x-2\ell n|x-1|+5\ell n|x-2|+c,\ c\in R$$

Το $\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx$ το υπολογίσαμε όπως στο παράδειγμα 1 με τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλάσματων.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int συν^2x\,dx,\quad I_2=\int ημ^2\,dx,\quad I_3=\int ημ^2x\cdot συν^3x dx,\quad I_4=\int εφ^2x dx$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $συν^2x=\frac{1+συν2x}{2}$ οπότε

$$I_1=\int συν^2x\,dx=\int \frac{1+συν2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int συν2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}ημ2x+c \qquad \left((ημ2x)'=συν2x\,(2x)'=2συν2x\right)$$

Επίσης ισχύει $ημ^2x=\frac{1-συν2x}{2}$ οπότε

$$I_2=\int ημ^2x\,dx=\int \frac{1-συν2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int συν2xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}ημ2x+c,\ c\in R$$

Είναι $I_3 = \int ημ^2xσυν^3x\,dx = \int ημ^2x \cdot συν^2x \cdot συνx\,dx = \int ημ^2x\left(1-ημ^2x\right)συνx\,dx =$

$= \int ημ^2x \cdot συνx\,dx - \int ημ^4x \cdot συνx\,dx = \frac{1}{3}ημ^3x - \frac{1}{5}ημ^5x + c,\ c \in R$

$$\begin{pmatrix} \left(ημ^3x\right)' = 3ημ^2x\left(ημx\right)' = 3ημ^2x \cdot συνx \\ \left(ημ^5x\right)' = 5ημ^4x\left(ημx\right)' = 5ημ^4x \cdot συνx \end{pmatrix}$$

Είναι $I_4 = \int εφ^2x dx = \int \frac{ημ^2x}{συν^2x}dx = \int \frac{1-συν^2x}{συν^2x}dx = \int\left(\frac{1}{συν^2x} - 1\right)dx = εφx - x + c,\ c \in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Τύπος: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (1)

Χρησιμοποιείται κυρίως σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων. Ακόμη όμως και για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f παρατηρούμε ότι:

$$\int f(x)dx = \int 1f(x)dx = \int (x)' f(x)dx$$

Ο τύπος μπορεί να πάρει και τις μορφές

$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

όπου $F(x)$, $G(x)$ παράγουσες των f, g αντίστοιχα.

Η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα του 2[ου] μέλους της (1) να είναι απλούστερο στον υπολογισμό ή να είναι της μορφής $(κ)\cdot(Αρχικό)$.

Επισημαίνουμε συνοπτικά κάποιες μορφές και ποια παράγουσα επιλέγουμε

α. (πολυωνυμική)·(εκθετική) με παράγουσα της εκθετικής

β. (πολυωνυμική)·(τριγωνομετρική) με παράγουσα της τριγωνομετρικής

γ. (πολυωνυμική)·(λογαριθμική) με την παράγουσα πολυωνυμικής

δ. (εκθετική)·(τριγωνομετρική) με παράγουσα όποια θέλουμε

Διαδοχική εφαρμογή της μεθόδου κάνουμε:

1. Στα γινόμενα α και β μέχρι να εξαντληθούν οι δυνάμεις του πολυωνύμου
2. Στο δ μέχρι να προκύψει το ζητούμενο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος και να το υπολογίσουμε επιλύοντας εξίσωση με άγνωστο ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Σημείωση: Όταν εφαρμόζεται πολλές φορές η προηγούμενη μέθοδος παίρνουμε κάθε φορά την παράγουσα της ίδιας μορφής δηλαδή ή μόνο της τριγωνομετρικής ή μόνο της εκθετικής εκτός από την περίπτωση γ. που παίρνουμε την παράγουσα της πολυωνυμικής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα: $I_1 = \int \ell nxdx$ **,** $I_2 = \int \ell n^2(x+1)dx$

Λύση

Είναι $I_1 = \int \ell nxdx = \int x'\ell nxdx = x\ell nx - \int x\frac{1}{x}dx = x\ell nx - x + c,\ c \in R$.

Επίσης $I_2 = \int \ell n^2(x+1)dx = \int (x+1)'\ell n^2(x+1)dx =$

$$= (x+1)\ell n^2(x+1) - \int (x+1)2\ell n(x+1)\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= (x+1)\ell n^2(x+1) - 2\int \ell n(x+1)dx = (x+1)\ell n^2(x+1) - 2\int (x+1)'\ell n(x+1)dx =$$

$$= (x+1)\ell n^2(x+1) - 2(x+1)\ell n(x+1) + 2\int (x+1)\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= (x+1)\ell n^2(x+1) - 2(x+1)\ell n(x+1) + 2x + c,\ c \in R$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$I_1 = \int (x^2+x)e^x dx$, $I_2 = \int (x^2+2x+3)\ell nx\,dx$, $I_3 = \int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$, $I_4 = \int 2^x \sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

Είναι $I_1 = \int (x^2+x)(e^x)'dx = (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x dx = (x^2+x)e^x - \int (2x+1)(e^x)'dx =$ $(x^2+x)e^x - (2x+1)e^x + \int 2e^x dx = (x^2+x)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + c,\ c \in R$

Επίσης $I_2 = \int\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)'\ell nx\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx - \int\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\frac{1}{x}dx =$

$\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx - \int\left(\frac{x^2}{3}+x+3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 - 3x + c,\ c \in R$

Έχουμε $I_3 = \int e^{2x}(\eta\mu x)'dx = e^{2x}\eta\mu x - 2\int \eta\mu x e^{2x}dx = e^{2x}\eta\mu x + 2\left[e^{2x}\sigma\upsilon\nu x - 2\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x dx\right]$

οπότε $I_3 = e^{2x}\eta\mu x + 2e^{2x}\sigma\upsilon\nu x - 4I_3$ ή $I_3 = \frac{e^{2x}(\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)}{5} + c,\ c \in R$

Είναι $I_4 = \int 2^x\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int 2^x(\eta\mu x)'dx = 2^x\eta\mu x - \int 2^x\ell n2\eta\mu x\,dx =$

$2^x\eta\mu x + \ell n2\int 2^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = 2^x\eta\mu x + \ell n2\left[2^x\sigma\upsilon\nu x - \int 2^x\ell n2\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]$ οπότε

$$I_4 = 2^x \eta\mu x + 2^x \sigma\upsilon\nu x \ell n2 - \ell n2 I_4 \text{ ή } I_4 = \frac{1}{\ell n^2 2}\left(2^x \eta\mu x + 2^x \ell n2 \sigma\upsilon\nu x\right) + c,\ c \in R.$$

Παράδειγμα 6

Αν $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx$ **να δείξετε ότι** $I_\nu + I_{\nu-2} = \frac{1}{\nu-1}\varepsilon\varphi^{\nu-1}x$ **με** $\nu \geq 3$.

Λύση

$$I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \cdot \varepsilon\varphi^2 x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1\right)dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\, dx$$

$$= \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \cdot (\varepsilon\varphi x)' dx - I_{\nu-2} \overset{u=\varepsilon\varphi x}{=} \int u^{\nu-2}du - I_{\nu-2} =$$

$$\frac{u^{\nu-1}}{\nu-1} - I_{\nu-2} = \frac{1}{\nu-1}\varepsilon\varphi^{\nu-1}x - I_{\nu-2}$$

> Για την ολοκλήρωση των $\varepsilon\varphi^\nu x$, $\sigma\varphi^\nu x$ χρησιμοποιούμε τους τύπους:
> $\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$, $\sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1$
> και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

> **Κατηγορία – Μέθοδος 3**
> **Ολοκλήρωση με αντικατάσταση**
> Θεωρητική στήριξη της μεθόδου αποτελεί ο τύπος:
> $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$ όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$
> με την προϋπόθεση ότι $\int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c,\ c \in R$ (όπου F μια παράγουσα της f).
> Εφαρμόζεται από το 1ο μέλος στο 2ο σε ολοκληρώματα που έχουν η μπορούν να πάρουν την μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$ και ο υπολογισμός του $\int f(u)du$ είναι ευκολότερος και από το 2ο μέλος στο 1ο όταν ζητούμενο είναι το $I = \int f(x)dx$ και υπάρχει κατάλληλη αντικατάσταση $x = g(t)$ οπότε $dx = g'(t)dt$ που το $\int f(g(t))g'(t)dt$ υπολογίζεται εύκολα.

Εφαρμογές:

1. Σε πολυώνυμα

$I = \int (2x+6)(x^2+6x+7)^8 dx =$ (θέτουμε $u = x^2 + 6x + 7$ οπότε $du = (2x+6)dx$)

$$= \int u^8 du = \frac{u^9}{9} + c = \frac{1}{9}(x^2+6x+7)^9 + c,\ c \in R.$$

2. Σε κλάσματα

α. $\int \frac{\ell nx}{x}dx = \int \ell nx \cdot \frac{1}{x}dx = \int \ell nx (\ell nx)' dx \overset{u=\ell nx}{=} \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ell n^2 x + c,\ c \in R$

β. $\int \frac{dx}{x\ell nx\ell n(\ell nx)} = \int \frac{(\ell nx)' dx}{\ell nx\ell n(\ell nx)} \overset{u=\ell nx}{=} \int \frac{du}{u\ell nu} = \int (\ell nu)' \frac{1}{\ell nu} du \overset{y=\ell nu}{=} \int \frac{dy}{y} = \ell n|y| + c =$

$= \ell n|\ell nu| + c = \ell n|\ell n(\ell nx)| + c,\ c \in R$

γ. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x)'}{e^x+1} dx \overset{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u+1} = \ell n|u+1| + c = \ell n|e^x+1| + c = \ell n\left(e^x+1\right) + c,\ c \in R$

δ. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx \overset{u=x^2+4x+5}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$\sqrt{u} + c = \sqrt{x^2+4x+5} + c,\ c \in R$

3. Σε ρίζες

$I = \int x\sqrt{x+1}$ Θέτουμε την ρίζα $\sqrt{x+1} = u$ οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$ ή $dx = 2 \cdot u \cdot du$.

Ακόμη $\sqrt{x+1} = u \Leftrightarrow x+1 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 - 1$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$I = \int \left(u^2-1\right) u 2u du = \int \left(2u^4 - 2u^2\right) du = 2\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + c =$

$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + c,\ c \in R$

4. Σε ολοκλήρωση γινομένων της μορφής $I = \int ημ^ν x συν^μ x dx$

α. Αν υπάρχει περιττός εκθέτης κάνουμε διάσπαση.

Έτσι $I = \int ημ^3 x συν^4 x dx = \int ημ^2 x συν^4 x ημx\, dx =$

$= -\int (1 - συν^2 x) συν^4 x (συνx)' dx \overset{u=συνx}{=} -\int (1-u^2) u^4 du$

$= -\int (u^4 - y^6) du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{5}συν^5 x + \frac{1}{7}συν^7 x + c,\ c \in R$

Στην περίπτωση που και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού: $συν^2 x = \frac{1+συν2x}{2}$, $ημ^2 x = \frac{1-συν2x}{2}$

Έτσι $I = \int συν^4 x dx = \int (συν^2 x)^2 dx = \int \frac{(1+συν2x)^2}{4} dx =$

$\int \frac{1+2συν2x+συν^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ημ2x + \int \frac{1}{4}συν^2 2x dx =$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\etaμ2x+\frac{1}{8}\int(1+συν4x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}ημ2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}ημ4x+c,\ c\in R$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστούν τα $I_1=\int εφx dx$, $I_2=\int\frac{1}{ημx}dx$.

Λύση

Έχουμε: $I_1=\int εφxdx=\int\frac{ημx}{συνx}dx=-\int\frac{(συνx)'}{συνx}dx=-\int\frac{du}{u}=-\ell n|u|+c=-\ell n|συνx|+c,\ c\in R$

$$I_2=\int\frac{1}{ημx}dx=\int\frac{ημx}{ημ^2x}dx=-\int\frac{(συνx)'}{1-συν^2x}dx\overset{u=συνx}{=}-\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{u^2-1}=\int\frac{A}{u+1}du+\int\frac{B}{u-1}du$$

όπου τα Α, Β υπολογίζονται κατά τα γνωστά δηλαδή $\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u-1}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Εύρεση του τύπου συνάρτησης όταν γνωρίζουμε μια σχέση μεταξύ της συνάρτησης και της παραγώγου της.

Βασική επιδίωξη είναι από την δοσμένη σχέση να καταλήξουμε σε ισότητα που η ολοκλήρωση των δύο μελών να μας δίνει εξίσωση που μοναδικός άγνωστος θα είναι η $f(x)$.

Από τα δεδομένα αν υπάρχουν υπολογίζουμε την σταθερά c.

Παράδειγμα 8

Α. Να βρεθεί συνάρτηση $f(x)$ **με** $Af=R$, $f(x)>0$ **για κάθε x τέτοια ώστε** $f'(x)(x^2-x+1)=(2x-1)f(x)$ **της οποίας η εφαπτομένη στο** $A(2,f(2))$ **έχει κλίση 18.**

Β. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ **στις παρακάτω περιπτώσεις**

α. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$, $f(1)=1$.

β. $f'(x)+f(x)=2$ **και το** C_f **περνά από** $(1,e)$

γ. $f'(x)-f(x)=1$ **και** C_f **περνά από** $(1,1)$.

Λύση

Α. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ οπότε $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$ ή $\ell nf(x)=\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx$ ή

$\ell nf(x)=\ell n(x^2-x+1)+c=\ell n(x^2-x+1)+\ell ne^c=\ell ne^c(x^2-x+1)$.

Είναι $f(x)=e^c(x^2-x+1)$ και με $x=2$ προκύπτει $f'(2)=18\Rightarrow$

$\overset{υποθ.}{\Rightarrow}3\cdot 18=3f(2)\Rightarrow f(2)=18\Rightarrow 18=e^c3\Rightarrow e^c=6\Rightarrow f(x)=6(x^2-x+1)$

Β.α. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$,

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x\Rightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=2x\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\int 2x dx\Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+c\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+c},\ c\in R \text{ με } x=1\Rightarrow 1=\frac{1}{1+c}\Rightarrow c=0,\ c\in R, f(x)=\frac{1}{x^2}$$

β. Με τη χρήση της συνάρτησης e^x.

$f'(x)+f(x)=2$ πολλαπλασιάζουμε με e^x και έχουμε:

$$f'(x)e^x+f(x)(e^x)'=2e^x\Rightarrow[f(x)e^x]'=2e^x\Rightarrow$$

$$\int\left[f(x)e^x\right]'dx=\int 2e^x dx\Rightarrow f(x)e^x=2e^x+c\Rightarrow f(x)=2+ce^{-x},\ c\in R.$$

Με $x=1$ είναι $e=2+c-e^{-1}\Leftrightarrow c=e(e-2)$. Άρα $f(x)=2+e(e-2)e^{-x}$.

γ. Ομοίως $\dfrac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{1}{e^x}\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=e^{-x}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{e^x}=\int e^{-x}dx\Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{e^x}=-e^{-x}+c\Rightarrow f(x)=-1+ce^x,\ x=1\Rightarrow 1=-1+ce\Rightarrow c=\frac{2}{e}\Rightarrow f(x)=-1+2e^{x-1},$$

$c\in R$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int\frac{x^3+27}{x+3}dx$ **β.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$ **γ.** $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

δ. $\int e^x συνe^x dx$ **ε.** $\int\frac{ημ2x}{1+συν^2x}dx$ **στ.** $\int συνx\cdot e^{ημx}dx$

2. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int\frac{1}{x^2-1}dx$ **β.** $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ **γ.** $\int εφx\,dx$

δ. $\int σφx\,dx$ **ε.** $\int\frac{1}{ημx\cdot συνx}dx$ **στ.** $\int\frac{1}{ημ^2x\cdot συν^2x}dx$

3. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int e^{-x} \eta\mu x \, dx$ **β.** $\int x^2 \ln x \, dx$ **γ.** $\int e^x \cdot \eta\mu 2x \, dx$

δ. $\int \ln x \, dx$ **ε.** $\int e^{2x} \sigma\upsilon\nu x \, dx$ **στ.** $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

4. Να βρείτε την συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) = 6x + 20, \; f'(-2) = -2, \; f(0) = 2$$

5. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : R \to (0, +\infty)$ όταν για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$(x^2 - x + 1) f'(x) = (2x - 1) f(x)$$

και η εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 18.

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1$ να είναι η αρχική της συνάρτησης $g(x) = 3x^2 + x - 4$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: **α.** $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} dx$, **β.** $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx$

8. Να βρείτε την συνάρτηση f αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) e^{f(x)} = 2x - 1$ και η γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 3.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

10. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$ **β.** $\int \left(\eta\mu(\eta\mu x + x) \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu(\eta\mu x + x) dx \right)$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Ένα δοχείο αρχικά περιέχει ένα λίτρο χημικής ουσίας Χ και 20 λίτρα νερό. Η ουσία Χ αντιδρά με το νερό ώστε να σχηματιστεί αέριο.
Τη χρονική στιγμή t sec απομένουν στο δοχείο υ λίτρα της ουσίας Χ ενώ ο όγκος του νερού έχει μειωθεί κατά $2(1-\upsilon)$ λίτρα.
Ο ρυθμός μείωσης του όγκου της ουσίας Χ είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογος του γινομένου του όγκου της Χ και του όγκου του νερού που υπάρχει στο δοχείο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

α. Να δείξετε ότι $\frac{du}{dt}=-ku(9+u)$ **όπου k είναι θετική σταθερά.**

β. Να λύσετε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

γ. Αν είναι γνωστό ότι όταν $t=30$ **είναι** $u=0,9$ **τότε να βρείτε:**

i. Πόσος χρόνος χρειάστηκε ώστε το $\frac{1}{4}$ **της αρχικής ποσότητας της Χ να αντιδράσει με το νερό.**

ii. Ποιος είναι ο όγκος της Χ που απομένει στο δοχείο μετά τα 5 πρώτα λεπτά.

Δίνεται: $\ell n1,1\cong\frac{2}{21}$, $\ell n1,3\cong\frac{16}{61}$, $\left(\frac{10}{11}\right)^{10}\cong\frac{5}{13}$.



Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης
Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: A \to R$ με $A=[\alpha,\beta]$. Χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα που το καθένα έχει μήκος $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Σε κάθε υποδιάστημα που σχηματίζεται π.χ. στο $[x_{\kappa-1},x_{\kappa}]$, $\kappa=1,2,....,\nu$ θεωρούμε τυχαίο σημείο ξ_{κ} (μπορεί να είναι και ένα από τα άκρα) και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_{\nu}=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+...+f(\xi_{\nu})\Delta x=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

το οποίο ονομάζουμε **άθροισμα Riemann της f στο** $[\alpha,\beta]$. Το σύνολο των άκρων $x_0=\alpha<x_1<x_2<...<x_{\nu}=\beta$ των διαστημάτων ονομάζουμε διαμέριση P_{ν} του $[\alpha,\beta]$ και τα $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{\nu}$ **ενδιάμεσα σημεία** της διαμέρισης. Το προηγούμενο άθροισμα έχει όριο όταν $\nu\to+\infty$ το οποίο ονομάζουμε **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[\alpha,\beta]$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{\nu}$ της διαμέρισης P_{ν} και το συμβολίζουμε με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Έτσι έχουμε: $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

Τα α,β ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης**. Αν ως ξ_{κ} επιλέξουμε τα δεξιά άκρα των διαστημάτων τότε $\xi_{\kappa}=\alpha+\kappa\Delta x=\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right]$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της f τον άξονα x΄x και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Άρα με $f(x)\geq 0$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$.

2. Όπως ορίστηκε το ολοκλήρωμα προϋποθέτει ότι $\alpha<\beta$. Μια επέκταση του ορισμού όταν $\alpha\geq\beta$ γίνεται ως εξής:

Αν $\alpha=\beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$.

Αν $\alpha>\beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=-\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.

3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $\lambda\in R$.

β. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, όπου $\lambda,\mu\in R$.

4. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$, όπου f συνεχής στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$.

Σχόλιο: Δεν είναι απαραίτητο το γ να είναι μεταξύ των α, β αρκεί να ανήκει στο Δ.

π.χ. $\int_{2}^{6} f(x)dx=\int_{2}^{10} f(x)dx+\int_{10}^{6} f(x)dx$, αν 2, 6, 10 ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και η f είναι συνεχής σ' αυτό.

5. Αν $\alpha\le\beta$ και f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\ge\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

6. $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|\le\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$, $\alpha\le\beta$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

7. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx=c(\beta-\alpha)$.

8. Με χρήση των προηγούμενων ιδιοτήτων αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με m, M ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο της f, αντίστοιχα στο $[\alpha,\beta]$ τότε $m\le f(x)\le M$ οπότε

$\int_{\alpha}^{\beta} m\,dx\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\le\int_{\alpha}^{\beta} M\,dx$ δηλαδή $m(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$

Για να δείξουμε μια διπλή ανισότητα με ολοκλήρωμα μελετούμε την υπό ολοκλήρωση (ή ολοκληρωτέα) συνάρτηση ως προς τα ακρότατα και εφαρμόζουμε την ιδιότητα 8.

π.χ. Να δειχθεί ότι $4\le\int_{1}^{3} 2^x dx\le16$.

Έχουμε $f(x)=2^x$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$ οπότε: $m=2^1=2$, $M=2^3=8$.

Άρα $2\le2^x\le8$ για κάθε $x\in[1,3]$ τότε $\int_{1}^{3} 2\,dx\le\int_{1}^{3} 2^x dx\le\int_{1}^{3} 8\,dx$ δηλαδή

$2(3-1)\le\int_{1}^{3} 2^x dx\le8(3-1)\Leftrightarrow4\le\int_{1}^{3} f(x)dx\le16$

Συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκλήρωμα με μεταβλητά όρια ολοκλήρωσης

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha,x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]'=f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Παρατήρηση: Τη μεταβλητή x ονομάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και αν τα όρια ολοκλήρωσης είναι σταθεροί αριθμοί το αποτέλεσμα θα είναι σταθερό ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αν όμως εκτός της μεταβλητής ολοκλήρωσης υπάρχει στη συνάρτηση και άλλη μεταβλητή και σταθερά όρια τότε το εξαγόμενο είναι συνάρτηση της άλλης μεταβλητής

π.χ. $\int_{\alpha}^{\beta} (x-t)f(t)dt$ είναι συνάρτηση του x ενώ το $\int_{\alpha}^{\beta} (x-t)f(x)dx$ είναι συνάρτηση του t.

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο Δ και f συνεχής στο Δ και α,β ανήκουν στο Δ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης στο ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανάλογες των μεθόδων που αναφέραμε στο αόριστο ολοκλήρωμα. Υπενθυμίζουμε:

1. Μέθοδος παραγουσών
2. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.
3. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ολοκλήρωση με τη μέθοδο των παραγουσών.
Αφορά τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων για τις οποίες γνωρίζουμε την παράγουσα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 e^{3x+4}dx$, **ii.** $\int_0^1 x(4x^2-2)^3 dx$, **iii.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$, **iv.** $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$

Λύση

i. $(e^{3x+4})' = e^{3x+4}(3x+4)' = 3\cdot e^{3x+4}$ είναι: $\int_0^1 e^{3x+4}dx = \frac{1}{3}[e^{3x+4}]_0^1 = \frac{1}{3}(e^7-e^4) = \frac{e^7-e^4}{3}$

ii. Είναι $((4x^2-2)^4)' = 4(4x^2-2)^3(4x^2-2)' = 4(4x^2-2)^3 8x = 32x(4x^2-2)^3$

$$\int_0^1 (4x^2-2)^3 dx = \frac{1}{32}[(4x^2-2)^4]_0^1 = \frac{1}{32}(2^4-(-2)^4) = \frac{1}{32}\cdot 0 = 0$$

iii. Είναι $\left(\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)' = -\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)' = -2\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx = -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 0+\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(-\eta\mu\frac{\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

iv. Είναι $\left(\sqrt{x^2+16}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+16}}(x^2+16)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ οπότε

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \left[\sqrt{x^2+16}\right]_0^3 = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2}(|x-1| - |x+1| - 4)dx$.

Λύση

Θέτουμε $f(x) = |x-1| - |x+1| - 4$. Η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών.

Αν $x \le -1$: $f(x) = -x+1-(-x-1)-4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x+1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2$

Αν $-1 < x < 1$: $f(x) = -x+1-(-x+1)-4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2x-4$

Αν $x \ge 1$: $f(x) = x-1-(x+1)-4 \Leftrightarrow f(x) = x-1-x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -6$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ αν } x \le -1 \\ -2x-4 \text{ αν } -1 < x < 1 \\ -6 \text{ αν } x \ge 1 \end{cases}$

Είναι $\int_{-2}^{2} f(x) = \int_{-2}^{-1}(-2)dx + \int_{-1}^{1}(-2x-4)dx + \int_{1}^{2}(-6)dx =$

$= -2\int_{-2}^{-1}dx - 2\int_{-1}^{1}xdx - 4\int_{-1}^{1}dx - 6\int_{1}^{2}dx = -2[x]_{-2}^{-1} - 2\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 4[x]_{-1}^{1} - 6[x]_1^2 = -16$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

α. Παραγοντική ολοκλήρωση

$\int_\alpha^\beta \mathbf{f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx}$ ή

$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx = [f(x)G(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)G(x)dx}$

όπου F, G παράγουσες των f, g αντίστοιχα και η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τα ίδια κριτήρια όπως και στα αόριστα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$I_1 = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$, $I_2 = \int_0^1 x2^x dx$, $I_3 = \int_{1/2}^{1} \dfrac{\ell n^2 x}{x^2}dx$, $I_4 = \int_0^\pi e^{3x}\text{συν}x dx$, $I_5 = \int_0^\pi xe^x \text{συν}x dx$

Λύση

- $I_1 = \int_0^1 (2x+1)(e^x)' dx = [(2x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (3e-1) - 2(e-1) = e+1$

- $I_2 = \int_0^1 x2^x dx = \int_0^1 x\frac{(2^x)'}{\ell n2}dx = \frac{1}{\ell n2}[x\cdot 2^x]_0^1 - \frac{1}{\ell n2}\int_0^1 2^x dx = \frac{2}{\ell n2} - \frac{1}{\ell n^2 2}[2^x]_0^1 = \frac{2}{\ell n2} - \frac{1}{\ell n^2 2}$

- $I_3 = -\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x}\right)' \ell n^2 x = -\left[\frac{1}{x}\ell n^2 x\right]_{1/2}^1 + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x}2\ell nx\frac{1}{x}dx = 2\ell n^2\frac{1}{2} - 2\int_{1/2}^1\left(\frac{1}{x}\right)'\ell nxdx =$

  $2\ell n^2 2 - 2\left[\frac{1}{x}\ell nx\right]_{1/2}^1 + 2\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2}dx = \ldots$

- $I_4 = \int_0^\pi e^{3x}(\eta\mu x)'dx = [e^{3x}\eta\mu x]_0^\pi - 3\int_0^\pi e^{3x}\eta\mu xdx = 3\int_0^\pi e^{3x}(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$

  $[3e^{3x}\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - 3\int_0^\pi 3e^{3x}\sigma\upsilon\nu xdx \Rightarrow I_4 = -3e^{3\pi} - 3 - 9I_4 \Leftrightarrow 10I_4 - 3(e^{3\pi}+1) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow I_4 = -\frac{3}{10}(e^{3\pi}+1)$

- $I_5 = \int_0^\pi xe^x\sigma\upsilon\nu xdx$

  Αρχικά επιλύουμε το αόριστο ολόκλήρωμα $I = \int xe^x\sigma\upsilon\nu xdx$

Έχουμε $\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx = \int(e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx = e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$

$= e^x\sigma\upsilon\nu x + \int e^x\eta\mu xdx = e^x\sigma\upsilon\nu x + \int(e^x)'\eta\mu xdx = e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x - \int e^x\sigma\upsilon\nu xdx$ οπότε

$2\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx = e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x$ δηλαδή $\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx = \frac{e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x}{2} + c$

Ισχύει $\left(\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx\right)' = \frac{1}{2}(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x)'$ οπότε $e^x\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x)'$ (1)

Επομένως, $I \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x)'dx =$

$$= \frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x) - \frac{1}{2}\int(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x)(x)'dx =$$

$$= \frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x) - \frac{1}{2}\int\left[e^x(\eta\mu x)' + (e^x)'\eta\mu x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x) - \frac{1}{2}\int[e^x\eta\mu x]'dx = \frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x) - \frac{1}{2}e^x\eta\mu x + c$$

Επομένως, $I_5 = \frac{1}{2}\left[x(e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}[e^x\eta\mu x]_0^\pi =$

$$= \frac{1}{2}\pi(e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi + e^\pi\eta\mu\pi) - \frac{1}{2}(e^\pi\eta\mu\pi - e^0\eta\mu 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi(e^\pi(-1) + e^\pi\cdot 0) - \frac{1}{2}(0-0) = -\frac{\pi e^\pi}{2}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: $\int_0^1 xe^{-x}dx$, $\int_1^e x^2\ell nx\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

- $\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 x(e^{-x})'dx = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 x'e^{-x}dx =$

$= -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -[xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 =$

$= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

- $\int_1^e x^2\ell nx\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'\ell nx\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ell nx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}(\ell nx)'dx =$

$\frac{e^3}{3}\ell ne - \frac{1}{3}\ell n1 - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)'dx = [x\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\eta\mu x dx = \frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2} - 0\cdot\eta\mu 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx =$

$= \frac{\pi}{2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Μέθοδος Αντικατάστασης. Εκφράζεται από τους τύπους

$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $I_2 = \int_0^1 xe^{x^2-1}dx$,

$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2}dx$, $I_4 = \int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\varphi(\ell nx)}{x}dx$, $I_5 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{dx}{x\,\ell nx\;\ell n(\ell nx)}$

Λύση

- $I_1 = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x(\varepsilon\varphi x)'dx$ θέτουμε $u = \varepsilon\varphi x$ οπότε $du = (\varepsilon\varphi x)'dx$.

Αν $x = 0$ τότε $u = 0$. Αν $x = \pi/4$ τότε $u = 1$. Έχουμε $I_1 = \int_0^1 u^3du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

- $I_2 = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$. Θέτουμε $u = x^2 - 1$ οπότε $du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{du}{2}$. Αν $x = 0$ τότε $u = -1$.

  Αν $x = 1$ τότε $u = 0$. Είναι $I_2 = \int_{-1}^0 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_{-1}^0 = \frac{1}{2}[e^0 - e^{-1}] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

- $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2} dx = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 3u + 2} = \int_0^1 \left[\frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}\right] du = \ldots$ (θέσαμε $\eta\mu x = u$)

- $I_4 = \int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}} \sigma\varphi(\ell n x)(\ell n x)' dx \overset{u=\ell n x}{=} \int_{\ell n e^{\pi/6}}^{\ell n e^{\pi/2}} \sigma\varphi u du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u} du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu u} (\eta\mu u)' du =$

  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} [\ell n(\eta\mu u)]' du = [\ell n(\eta\mu u)]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ell n \eta\mu \frac{\pi}{2} - \ell n \eta\mu \frac{\pi}{6} = -\ell n \frac{1}{2} = \ell n 2$

- $I_5 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{dx}{x \ell n x \, \ell n(\ell n x)}$. Θέτουμε $\ell n(\ell n x) = u$ οπότε $[\ell n(\ell n x)]' dx = du \Leftrightarrow \frac{1}{x \ell n x} dx = du$.

Αν $x = e^5$ τότε $u = \ell n(\ell n e^5) = \ell n 5$. Αν $x = e^2$ τότε $u = \ell n(\ell n e^2) = \ell n 2$.

Έχουμε $I_5 = \int_{\ell n 2}^{\ell n 5} \frac{1}{u} du = [\ell n|u|] = \ell n|\ell n 5| - \ell n|\ell n 2|$.

Εφαρμογές με αντικατάσταση $x = \varphi(t)$

Παράδειγμα 6

α. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$I_1 = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} dx$, $\rho > 0$, **αντικαθιστώντας** $x = \rho\eta\mu\theta$,

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $I_2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$, **αν η f είναι περιττή στο [–α,α].**

ii. $I_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2\int_0^{\alpha} f(x) dx$ **αν η f είναι άρτια στο [–α,α].**

Λύση

α. Θέτουμε $x = \rho\eta\mu\theta$ και για να είναι "1 - 1" παίρνουμε $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

με $x = -\rho$ είναι $\eta\mu\theta = -1$ οπότε $\theta = -\frac{\pi}{2}$, με $x = \rho$ είναι $\eta\mu\theta = 1$ οπότε $\theta = \frac{\pi}{2}$

Επίσης $dx = \rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και $\sqrt{\rho^2 - x^2} = \sqrt{\rho^2 - \rho^2\eta\mu^2\theta} = \sqrt{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$

Έχουμε $I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta =$

$= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta + \frac{1}{2}\rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\rho^2 [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\rho^2 [\eta\mu 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi\rho^2$

Σχόλιο: Το ολοκλήρωμα I εκφράζει το εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας ρ.

β. Αν η f περιττή τότε $f(-x)=-f(x)$ στο $[-\alpha,\alpha]$

Έχουμε $I_2=\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=I+J$. Για το I θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$.

Αν $x=-\alpha$ τότε $u=\alpha$. Αν $x=0$ τότε $u=0$.

Έχουμε $I=\int_{\alpha}^{0}f(-u)(-du)\overset{f\ \text{περιττή}}{=}\int_{\alpha}^{0}f(u)du=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ (1)

οπότε $I_2\overset{(1)}{=}-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=0$

ii. Ομοίως αν f άρτια τότε $(f(-x)=f(x)$ στο $[-\alpha,\alpha])$ και έχουμε:

$I_3=\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$. Θέτουμε $-x=u$ οπότε $dx=-du$.

Αν $x=-\alpha$ τότε $u=\alpha$ και αν $x=0$ τότε $u=0$.

Έχουμε $I_3=\int_{\alpha}^{0}f(u)(-du)+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(u)du+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=$

$=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I_1=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$, $I_2=\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx$ **, θέτοντας** $x=2\eta\mu t$ **και** $x=\varepsilon\varphi t$ **αντίστοιχα.**

Λύση

- Θέτουμε $x=2\eta\mu t$ οπότε $(x)'dx=(2\eta\mu t)'dt$ ή $dx=2\sigma\upsilon\nu t dt$

Αν $x=0$ είναι $0=2\eta\mu t\Leftrightarrow \eta\mu t=0$ οπότε $t=0$

Αν $x=2$ είναι $2=2\eta\mu t\Leftrightarrow \eta\mu t=1$ οπότε $t=\frac{\pi}{2}$

Έτσι $I_1=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\eta\mu^2 t}\cdot 2\sigma\upsilon\nu t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\eta\mu^2 t)}\cdot 2\sigma\upsilon\nu t\,dt=$

$4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t}\cdot\sigma\upsilon\nu t\cdot dt=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}\cdot dt=$

$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dt+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2t\,dt=2[t]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+[\eta\mu 2t]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+(\eta\mu\pi-\eta\mu 0)=\pi$

Για τον υπολογισμό του I_2 θέτουμε $x=\varepsilon\varphi t$ οπότε $(x)'dx=(\varepsilon\varphi t)'dt$ ή $dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Αν $x=-1$ είναι $\varepsilon\varphi t=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ οπότε $t=-\frac{\pi}{4}$

Αν $x=1$ είναι $\varepsilon\varphi t=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ οπότε $t=\frac{\pi}{4}$

Έτσι $I_2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+εφ^2t}\frac{1}{συν^2t}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\frac{ημ^2t}{συν^2t}}\frac{1}{συν^2t}dt =$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{συν^2t}{ημ^2t+συν^2t}\frac{1}{συν^2t}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt = [t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

Παράδειγμα 8

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ να αποδείξετε ότι:

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(ημx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(συνx)dx$ **ii.** $\int_0^{\pi} xf(ημx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(ημx)dx$

Λύση

i. Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-t$ τότε $(x)'dx = \left(\frac{\pi}{2}-t\right)'dt$ ή $dx=-dt$

Αν $x=0$ τότε $0=\frac{\pi}{2}-t \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$

Αν $x=\frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-t \Leftrightarrow t=0$

Έτσι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(ημx)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(ημ\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(συνt)dt \overset{t=x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(συνx)dx$

ii. Θέτουμε $x=\pi-t$ τότε $(x)'dx=(\pi-t)'dt$ ή $dx=-dt$

Αν $x=0$ τότε $0=\pi-t \Leftrightarrow t=\pi$

Αν $x=\pi$ τότε $\pi=\pi-t \Leftrightarrow t=0$

Έτσι $\int_0^{\pi} xf(ημx)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(ημ(\pi-t))dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(ημt)dt =$

$= \pi\int_0^{\pi} f(ημt)dt - \int_0^{\pi} tf(ημt)dt \overset{t=x}{=} \pi\int_0^{\pi} f(ημx)dx - \int_0^{\pi} xf(ημx)dx$

Δηλαδή $\int_0^{\pi} xf(ημx)dx = \pi\int_0^{\pi} f(ημx)dx - \int_0^{\pi} xf(ημx)dx \Leftrightarrow$

$2\int_0^{\pi} xf(ημx)dx = \pi\int_0^{\pi} f(ημx)dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi} xf(ημx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(ημx)dx$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Η συνάρτηση που ορίζεται από ολοκλήρωμα και η παράγωγός της.

α. Εύρεση του πεδίου ορισμού της $F(x)=\int_{α}^{x} f(t)dt$

Βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της προς ολοκλήρωσην συνάρτησης και απαιτούμε τα άκρα να είναι στο ίδιο διάστημα ώστε η ολοκληρούμενη συνάρτηση να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων και η παράγωγός τους.

1. $F(x)=\int_3^x \sqrt{t^2-4}dt$, **2.** $G(x)=\int_2^x \sqrt{t^3-t}\,dt$

Λύση

1. Πρέπει $t^2-4\geq 0 \Leftrightarrow t\leq -2$ ή $t\geq 2 \Leftrightarrow t\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Επειδή το $3\in[2,+\infty)$ πρέπει και το $x\in[2,+\infty)$. Άρα $A_F=[2,+\infty)$ και $F'(x)=\sqrt{x^2-4}$

2. Πρέπει $t^3-t\geq 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-1)\geq 0$ $t\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$. Επειδή το $2\in[1,+\infty)$ πρέπει και το $x\in[1,+\infty)$. Άρα $A_G=[1,+\infty)$ και $G'(x)=\sqrt{x^3-x}$

β. Εύρεση του πεδίου ορισμού σύνθετης συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα $H(x)=\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt$, με $f(t)$ συνεχή στο Δ. Απαιτούμε στο διάστημα του πεδίου ορισμού της $f(t)$ που ανήκει το α στο ίδιο διάστημα να ανήκει και η $g(x)$. Εννοείται ότι έχουμε πάρει τους περιορισμούς που απαιτούνται για την $g(x)$.

Όσον αφορά και την παράγωγο της H είναι $H'(x)=f(g(x))g'(x)$

Δηλαδή $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))g'(x)$.

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί το ευρύτερο σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η $H(x)=\int_1^{x^2+1}\sqrt{5-t}dt$ **καθώς και η παράγωγός της.**

Λύση

Πεδίο ορισμού της $f(t)=\sqrt{5-t}$ είναι το $A_f=(-\infty,5]$. Το πεδίο ορισμού της $g(x)=x^2+1$ είναι το R.

Πρέπει: $x^2+1\in(-\infty,5] \Leftrightarrow x^2+1\leq 5 \Leftrightarrow x^2\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|\leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2 \Leftrightarrow x\in[-2,2]$

Άρα το πεδίο ορισμού της H (x) είναι :

$A_H=[-2,2]$ και $H'(x)=\sqrt{5-(x^2+1)}(x^2+1)'=\sqrt{4-x^2}\,2x$

γ. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{h(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$

Επιλέγουμε $\alpha\in A_f$

$g(x)=\int_{h(x)}^{\alpha} f(t)dt+\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt=-\int_\alpha^{h(x)} f(t)dt+\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt$.

Οπότε $g'(x)=-f(h(x))h'(x)+f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

δ. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(t)dt$

$$g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}xf(t)dt-\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt=x\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt-\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt$$

Άρα $g'(x)=(x)'\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+x\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt\right)'-\left(\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt\right)'=$

$\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+x\cdot 0-0=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$

ε. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{\alpha}^{x}(x-t)f(t)dt$

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}xf(t)dt-\int_{\alpha}^{x}tf(t)dt \Leftrightarrow g(x)=x\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x}tf(t)dt$$

Άρα $g'(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)\Leftrightarrow g'(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt$

ζ. Οι μορφές $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x-t)dt$, $h(x)=\int_{\alpha}^{x}f(x-t)dt$, $\Phi(x)=\int_{\alpha}^{x}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ παραγωγίζονται αφού πρώτα μετασχηματίζουμε τα ολοκληρώματα κάνοντας αντίστοιχα τις αντικαταστάσεις $x-t=u$, $\frac{x}{t}=u$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Εύρεση του τύπου συνάρτησης f όταν γνωρίζουμε σχέση στην οποία υπάρχει $\int_{\alpha}^{x}f(x)dt$.

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση ώστε να εξαλείφονται τα ολοκληρώματα.
Η τυχούσα σταθερά που θα προκύψει, υπολογίζεται αν θέσουμε σε υπόθεση και συμπέρασμα όπου x το ένα όριο ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 11

Αν $G(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$ **όπου** $f(t)=\int_{1}^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ $x>0$, $t>0$ **να βρεθεί η** $G''(1)$**.**

Λύση

$G'(x)=f(x)=\int_{1}^{3x}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$. Άρα $G''(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{3x}}(3x)'=\frac{3e^{3x}}{\sqrt{3x}}$. Επομένως $G''(1)=\frac{3e^3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^3$

Παράδειγμα 12

Να βρεθεί συνάρτηση $f:R\to R$ **για την οποία ισχύει ότι** $\int_{\alpha}^{x}e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)$**.**

276.

Λύση

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της υπόθεσης και έχουμε:

$$e^{-x}f(x)=-e^{-x}-\left(-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)\right)\overset{\text{πράξεις}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{-x}f'(x)=-e^{-x}\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow f(x)=-x+c$$

Στην υπόθεση για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=0$.

Στο συμπέρασμα για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=-\alpha+c\Leftrightarrow 0=-\alpha+c\Leftrightarrow c=\alpha$. Άρα $f(x)=-x+\alpha$

Παράδειγμα 13

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\int_1^{x^2} f(t)dt=x^2\ell nx$, $x>0$. Να βρείτε το $f(1)$ και το $f(4)$.

Λύση

$$\int_1^{x^2} f(t)dt=x^2\ell nx \text{ οπότε } \left(\int_1^{x^2} f(t)dt\right)'=\left(x^2\ell nx\right)'\Leftrightarrow f(x^2)(x^2)'=2x\ell nx+x^2\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$2xf(x^2)=2x\ell nx+x \quad (1)$$

Η (1) για $x=1$ γίνεται: $\quad 2\cdot1\cdot f(1^2)=2\cdot1\cdot\ell n1+1\Leftrightarrow 2f(1)=1\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}$

Η (1) για $x=2$ γίνεται: $\quad 2\cdot2\cdot f(2^2)=2\cdot2\cdot\ell n2+2\Leftrightarrow 4f(4)=4\ell n2+2\Leftrightarrow$

$$2f(4)=2\ell n2+1\Leftrightarrow f(4)=\frac{2\ell n2+1}{2}$$

Παράδειγμα 14

Να βρείτε την συνεχή στο R συνάρτηση f και την τιμή του λ αν ισχύει: $2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt=8$ για κάθε $x\in R$.

Λύση

Ισχύει $2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt=8$ (1). Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη οπότε:

$\left(2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt\right)'=(8)'\Leftrightarrow 4x-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=4x$. Θέτουμε στην (1) $f(t)=4t$ και

έχουμε: $2x^2-\int_\lambda^x 4tdt=8\Leftrightarrow 2x^2-4\left[\frac{t^2}{2}\right]_\lambda^x=8\Leftrightarrow 2x^2-4\frac{x^2-\lambda^2}{2}=8\Leftrightarrow$

$$2x^2-2x^2+2\lambda^2=8\Leftrightarrow \lambda^2=4\Leftrightarrow \lambda=-2 \text{ ή } \lambda=2$$

Παράδειγμα 15

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=(1+x^2)\left[1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right]$ για όλα τα $x\in R$.

Λύση

Όταν παραγωγίζουμε για να εξαλείψουμε ένα ολοκλήρωμα λύνουμε ως προς αυτό ώστε να εξαλείφεται με την πρώτη παραγώγιση.

Έτσι έχουμε: $\frac{f(x)}{1+x^2}=1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\left[\frac{f(x)}{1+x^2}\right]'=\frac{f(x)}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1+x^2}=c\cdot e^x \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x(1+x^2)$$

(χρησιμοποιήσαμε την πρόταση: $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στην υπόθεση για } x=0 \text{ έχουμε } f(0)=1\\ \text{Στο συμπέρασμα για } x=0 \text{ έχουμε } f(0)=c\end{array}\right\} c=1. \text{ Άρα } f(x)=e^x(1+x^2)$$

Παράδειγμα 16

Να βρεθεί συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x)=\eta\mu x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt \quad \textbf{(1)}$$

Λύση

Αρχικά μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$

- Θέτουμε $x-t=u \Leftrightarrow -t=u-x$.
- $(x-t)'dt=du \Leftrightarrow -dt=du \Leftrightarrow dt=-du$.
- Αν $t=0$ τότε $u=x$. Αν $t=x$ τότε $u=0$.

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται: $I=\int_x^0 e^{u-x}f(u)(-du)=-\int_x^0 \frac{1}{e^x}e^u f(u)du=\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f(u)du$

Έτσι $f(x)=\eta\mu x+\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f(u)du \Leftrightarrow e^x f(x)=e^x\eta\mu x+\int_0^x e^u f(u)du$.

Άρα $\quad (e^x f(x))'=(e^x\eta\mu x)'+\left(\int_0^x e^u f(u)du\right)' \Leftrightarrow$

$$(e^x)'f(x)+e^x f'(x)=(e^x)'\eta\mu x+(e^x)(\eta\mu x)'+\left(\int_0^x e^u f(u)du\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\eta\mu x+(\sigma\upsilon\nu x)e^x+e^x f(x) \Leftrightarrow f'(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$$

Άρα $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c \quad (2)$

Θέτουμε $x=0$ στις (1) και (2) και έχουμε:

$f(0)=0$ και $f(0)=c-1$. Άρα $c-1=0 \Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όπως είδαμε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής και $\alpha \in \Delta$.

Την συνάρτηση λοιπόν αυτή μπορούμε να την συναντήσουμε σε οποιοδήποτε θέμα συνέχειας και παραγώγων π.χ. Bolzano, ακρότατα το Θ. Fermat, καμπυλότητα, όρια, ασύμπτωτες, σε θέματα Rolle και Μέσης Τιμής.

Στα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν θα τονιστούν κάποια σημεία που θέλουν μεγαλύτερη προσοχή.

Παράδειγμα 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\int_0^x dt, & x>0 \\ 2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}, & x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right] \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Λύση

• Αν $x>0$, η $f(x)=2\int_0^x dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

• Αν $x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, η $f(x)=2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής.

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

• Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}=2\int_0^0 \dfrac{dt}{2t+1}dt=0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 2\int_0^x dt=2\int_0^0 dt=0$

και $f(0)=2\int_0^0 \dfrac{dt}{2t+1}=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

• Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\int_0^x \frac{dt}{2t+1}}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\left[2\int_0^x \frac{dt}{2t+1}\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\frac{1}{2x+1}}{1}=\lim_{x\to0^-}\frac{2}{2x+1}=2$$

και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\int_0^x dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left[2\int_0^x dt\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\cdot1}{1}=2$.

Άρα $f'(0)=2$ και επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Είναι $\left[\int_x^0 f(t)dt\right]'=-f(x)$, $\left[\int_0^x dt\right]'=1$.

Παράδειγμα 18

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x)=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt$.

Λύση

Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t^2}dt$.

Το πεδίο ορισμού της $f(t)=(t^2-5t+4)e^{-t}$ είναι το R.

Το πεδίο ορισμού της $g(x)=x^2$ είναι το R και επειδή $g(x)=x^2\in R$ για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της F είναι το R.

$$F'(x)=\left(\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}\right)'=(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}(x^2)'=2x(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}$$

$F'(x)=0\Leftrightarrow 2x(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x(x^4-5x^2+4)=0\Leftrightarrow x=0$ ή

$x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2=1$ ή $x^2=4$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$ ή $x=-2$ ή $x=2$ έχουμε:

Πίνακας προσήμου των τιμών της F΄

x	-∞		-2		-1		0		1		2		+∞
F΄(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
F(x)		↘		↗		↘		↗		↘		↗	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα για $x=-2$, $x=0$, $x=2$, η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $F(-2)$, $F(0)$, $F(2)$ αντίστοιχα, ενώ για $x=-1$, $x=1$ η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $F(-1)$, $F(1)$ αντίστοιχα.

Έχουμε: $F(0)=\int_0^0(t^2-5t+4)e^{-t}dt=0$

Παρατηρούμε ότι: η F είναι άρτια στο R διότι για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$F(-x)=\int_0^{(-x)^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt=F(x)$$

Επομένως $F(-2)=F(2)$ και $F(-1)=F(1)$.

Έχουμε $F(1)=\int_0^1(t^2-5t+4)e^{-t}dt=-\int_0^1(t^2-5t+4)(e^{-t})'dt=$

$$=-[(t^2-5t+4)e^{-t}dt]_0^1+\int_0^1\left[(t^2-5t+4)'e^{-t}dt\right]=-4+\int_0^1(2t-5)e^{-t}dt=$$

$$=-4-\int_0^1(2t-5)(e^{-t})'dt=-4-[(2t-5)e^{-t}]_0^1+2\int_0^1e^{-t}dt=-4-\left[-3\frac{1}{e}+5\cdot1\right]-2[e^{-t}]_0^1=$$

$$-4+\frac{3}{e}-5-2\left(\frac{1}{e}-1\right)=-4+\frac{3}{e}-\frac{2}{e}+2=-2+\frac{1}{e}=\frac{1-2e}{e}$$

Άρα $F(-1)=F(1)=\frac{1-2e}{e}$. Ανάλογα υπολογίζουμε το $F(-2)=F(2)$.

Παράδειγμα 19

Έστω $F(x)=\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F στο $x=-\frac{1}{2}$ παρουσιάζει αρνητικό ελάχιστο.

Λύση

Δίνεται $F(x)=\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt$.

$f(t)=\sqrt{t+3}$, $A_f=[-3,+\infty)$ $g(x)=x^2+x$, $A_g=R$

Επομένως ζητάμε εκείνα τα $x\in R$ ώστε $(x^2+x)\in[-3,+\infty)$ δηλαδή

$x^2+x\geq -3 \Leftrightarrow x^2+x+3\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in R$ διότι $\Delta<0$. Άρα $A_F=R$

$F'(x)=\left(\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt\right)'=\sqrt{x^2+x+3}(2x+1),\ A_{F'}=R$

Έχουμε $F'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2+x+3}=0 \underset{\left(\substack{x^2+x+3>0,\ x\in R\\ \text{αφού } \Delta<0}\right)}{\Leftrightarrow}$

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	Ο.Ε.	↗

Πράγματι λοιπόν για $x=-\frac{1}{2}$ η F παρουσιάζει ελάχιστο και ίσο με $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $F\left(-\frac{1}{2}\right)<0$.

1ος τρόπος

Έχουμε: $F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}\sqrt{t+3}dt=\int_0^{-\frac{1}{4}}(t+3)^{\frac{1}{2}}(t+3)'dt=\left[\frac{(t+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{-\frac{1}{4}}=$

$=\frac{2}{3}\left[(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{4}+3\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}\right]<0$, διότι

$\frac{11}{4}<3 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}<3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}<0$.

2ος τρόπος

Έχουμε $F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{-1/4}\sqrt{t+3}dt=-\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt$ (1) Επειδή $\sqrt{t+3}>0$ για κάθε $t\in\left[-\frac{1}{4},0\right]$

ισχύει $\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt>0 \Leftrightarrow -\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt<0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{1}{2}\right)<0$.

Παράδειγμα 20

Να βρεθεί το όριο της $f(x)=\dfrac{\int_0^x(\eta\mu t-t)dt}{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}$ όταν $x\to 0$.

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^x(\eta\mu t-t)dt\right]'}{(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x}{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x-x(-\eta\mu x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x-x}{x\eta\mu x}\right]\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=0$$

Παράδειγμα 21

Έστω $\beta>\alpha>0$ και η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$ και έστω $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt$, $x>0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

α. Η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στον x΄x.

β. $g(x_0)=2+f(x_0)$

Λύση

α. Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την g στο [α,β]

- Η g συνεχής στο [α,β]
- Η g παραγωγίσιμη στο (α,β)
- $g(\alpha)=2+\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\alpha f(t)dt=2+\frac{1}{\alpha}\cdot 0=2$, $g(\beta)=2+\frac{1}{\beta}\int_\alpha^\beta f(t)dt\overset{\upsilon\pi o\theta.}{=}2+\frac{1}{\beta}\cdot 0=2$

  Δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$, οπότε η εφαπτόμενη στο $(x_0.g(x_0))$ είναι παράλληλη στον x΄x.

282.

β. Από υπόθεση έχουμε: $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x}f(t)dt \Leftrightarrow xg(x)=2x+\int_{\alpha}^{x}f(t)dt \Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{x}f(t)dt=xg(x)-2x \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x}f(t)dt=x\big(g(x)-2\big)$ (1)

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left[\int_{\alpha}^{x}f(t)dt\right]'=\left[x\big(g(x)-2\big)\right]' \Leftrightarrow f(x)=(x)'\big(g(x)-2\big)+x\big(g(x)-2\big)' \Leftrightarrow$$

$f(x)=g(x)-2+xg'(x)$ (2)

Θέτουμε στην (2) όπου x το x_0 και έχουμε:

$f(x_0)=g(x_0)-2+x_0g'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)-2+x_0\cdot 0$ (διότι από α ερώτημα το $g'(x_0)=0$)

$\Leftrightarrow g(x_0)=f(x_0)+2$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ανισότητες με ολοκληρώματα

α. Γνωρίζουμε ότι αν $f(x)\geq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq 0$ (θεωρία) ή

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$ αν η f δεν έχει τιμή 0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β. Αν $f(x)\geq g(x)$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

Απόδειξη

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M οπότε

$m\leq f(x)\leq M$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}mdx\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}Mdx$ ή

$m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

Παράδειγμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ **με** $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$ **και η** C_f **περνά από σημείο** $A(1,1)$.

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

β. Να δειχθεί ότι $\frac{x-1}{2x^2}f(x)\leq\int_{1}^{x}\frac{f(t)}{2t^2}dt\leq\frac{x-1}{2}$.

Λύση

α. $\frac{f'(x)}{f(x)}=-2x$ Άρα $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(-2x)dx \Leftrightarrow \ell nf(x)=-x^2+c \Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2+c}$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το $A(1,1)$ έχουμε:

$f(1)=1 \Leftrightarrow 1=e^{-1+c} \Leftrightarrow e^{c-1}=e^0 \Leftrightarrow c=1$ Άρα $f(x)=e^{-x^2+1}$

β. Έστω $g(t)=\dfrac{f(t)}{2t^2}=\dfrac{e^{-t^2+1}}{2t^2}$, $t\in[1,x]$

$$g'(t)=\frac{-2te^{-t^2+1}2t^2-e^{-t^2+1}4t}{4t^4}=-\frac{4te^{-t^2+1}(t^2+1)}{4t^4}=\frac{-e^{-t^2+1}(t+1)}{t^3}<0$$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,x]$. Έχουμε $g(1)=\dfrac{f(1)}{2\cdot 1^2}=\dfrac{1}{2}$ και $g(x)=\dfrac{e^{-x^2+1}}{2x^2}=\dfrac{f(x)}{2x^2}$.

Επειδή $1<t<x \Leftrightarrow g(x)<g(t)<g(1)$ (διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα)

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{2x^2}\le\dfrac{f(t)}{2t^2}\le\dfrac{1}{2}$ για κάθε $t\in[1,x]$.

Άρα $\int_1^x \dfrac{f(x)}{2x^2}dt\le\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt\le\int_1^x\dfrac{1}{2}dt \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x^2}f(x)\le\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt\le\dfrac{1}{2}(x-1)$

Εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής για την εύρεση ορίου

Παράδειγμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}-2$, $x\in R$.

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt$.

Λύση

α. $f'(x)=-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)'}{x^2+4}=-\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=-\dfrac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Επίσης $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Επομένως η f παρουσιάζει στο $x=0$ μέγιστο, το $f(0)=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

β. Με $x>0$ και $t\in[x,x+1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε: $x\le t\le x+1\Leftrightarrow$ $f(x+1)\le f(t)\le f(x)$. Ολοκληρώνουμε ως προς t και έχουμε:

$\int_x^{x+1}f(x+1)dt\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le\int_x^{x+1}f(x)dt\Leftrightarrow f(x+1)\int_x^{x+1}dt\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)\int_x^{x+1}dt$

(οι ποσότητες $f(x+1)$, $f(x)$ είναι σταθεροί όροι στην ολοκλήρωση ως προς t)

$\Leftrightarrow f(x+1)(x+1-x)\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)(x+1-x)\Leftrightarrow f(x+1)\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)$ και

επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}-2\right]\le \lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-2\right]\Leftrightarrow$$

$$-2\le \lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le -2$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=-2$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8
Αναγωγικοί τύποι

Παράδειγμα 24

Να δειχθεί ότι $I_\nu=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xd=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)I_{\nu-2}$.

Λύση

Είναι $I_\nu=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xdx=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-1}x\eta\mu xdx=-\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-1}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=$

$$=-[\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^{\nu-1}x)'\sigma\upsilon\nu xdx=$$

$$=-\left[\eta\mu^{\nu-1}\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\eta\mu^{\nu-1}0\sigma\upsilon\nu 0\right]+\int_0^{\pi/2}(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu xdx=$$

$$=0+\int_0^{\pi/2}(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu^2xdx=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-2}x(1-\eta\mu^2x)dx=$$

$$=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^{\nu-2}x-\eta\mu^\nu x)dx=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-2}xdx-(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xdx=$$

$$=(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}-\nu I_\nu+I_\nu\Leftrightarrow I_\nu+\nu I_\nu-I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}\Leftrightarrow I_\nu=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)I_{\nu-2}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δειχθεί ότι αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

(**Απ.:** $u=\alpha+\beta-x$ με άκρα $\begin{matrix}x=\alpha,\ u=\beta\\ x=\beta,\ u=\alpha\end{matrix}$, $dx=-du$ κ.λ.π. .)

2. Αν f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ισχύουν:

α. $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_{-\alpha}^\alpha f(-x)dx$ **β.** $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha [f(x)+f(-x)]dx$

(**Υπ.:** $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_{-\alpha}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$, $u=-x$ κ.λ.π.)

3. Αν f συνεχής στο R και $\alpha,\beta,\gamma \in R$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx$.

(**Υπ.:** $x = u-\gamma$, $\begin{matrix} x=\alpha,\ u=\alpha+\gamma \\ x=\beta,\ u=\beta+\gamma \end{matrix}$, $dx = du$ κ.λ.π. .)

4. Αν η f είναι συνεχής στο R με $\alpha,\beta,\theta \in R$ και $\theta > 0$ τότε $\int_{\alpha\theta}^{\beta\theta} f(x)dx = \theta\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

(**Υπ.:** $u = \frac{x}{\theta}$ κ.λ.π.)

5. Αν $f(x) = f(\alpha+\beta-x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να δειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

(**Υπ.:** $x = \alpha+\beta-u$, $\begin{matrix} x=\alpha,\ u=\beta \\ x=\beta,\ u=\alpha \end{matrix}$, $dx = -du$ κ.λ.π. .)

6. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]$$

(**Υπ.:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx = c(\beta-\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $u = \alpha+\beta-x$ κ.λ.π. για το ολοκλήρωμα του πρώτου μέρους)

7. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R έτσι ώστε

α. f'' γνήσια αύξουσα, **β.** $\int_{0}^{\pi}[f(x)+f''(x)]συνxdx = -2\pi$, **γ.** $f'(\pi) = \pi$.

Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

(**Απ.:** Βρίσκουμε ότι $f'(0) = \pi$ στο $[0,\pi]$ για την f' Εφαρμόζεται το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,\pi): f''(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο άρα $x_0 =$ σημείο καμπής. f'' γνήσια μονότονη άρα μοναδική ρίζα το x_0)

8. Έστω f συνεχής στο R με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(x) = 1-2x^2\int_{0}^{1} tf^2(xt)dt$, για κάθε $x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

(**Απ.:** Με $u = xt \begin{cases} t=0,\ u=0 \\ t=1,\ u=x \end{cases}$, $du = xdt$, $dt = \frac{1}{x}du \Rightarrow f(x) = 1-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\int_{0}^{x} uf^2(u)du \Rightarrow$

$f(x) = 1-2\int_{0}^{x} uf^2(u)du \Rightarrow f'(x) = -2xf^2(x) \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \int\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)dx = \int 2xdx \Rightarrow$

$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \xrightarrow[\text{Συμπ.}]{\text{Υπόθ.}} \left.\begin{matrix} \to x=0,\ f(0)=1 \\ \to x=0,\ c=\frac{1}{f(0)}=1 \end{matrix}\right\} f(x) = \frac{1}{x^2+1}$)

9. Έστω f συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in R$ και $g(x)=x^2-5x+1-\int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $x\in R$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(-3,0)$.

(**Υπ.:** $g(0)=1$, $g(-3)=25-\int_0^{24} f(t)dt$ αλλά $\int_0^{24} f(t)dt\geq\int_0^{24}2dt=48\Rightarrow g(-3)<0$ κ.λ.π., Bolzano)

10. Έστω $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $g(x)=\int_0^x h(t)dt$. Να δείξετε ότι $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$.

11. Αν η f είναι περιοδική με περίοδο Τ τότε $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

(**Υπ.:** Έχουμε $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx=\int_\alpha^T f(x)dx+\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx=I_1+I_2$ για το I_2 θέτουμε

$x=y+T$ $\quad dx=du$, $\; x=T, u=0$, $\; x=\alpha+T\Rightarrow u=\alpha$ $\quad \Rightarrow I_2=\int_0^\alpha f(u+T)du=\int_0^\alpha f(u)du$, T = περίοδος

$\Rightarrow I_2=\int_0^\alpha f(x)dx\Rightarrow I=\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx=\int_\alpha^T f(x)dx+\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$)

12. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **β.** $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ **γ.** $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

13. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$ **β.** $\int_0^\pi x^2\cdot\eta\mu x\,dx$ **γ.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\eta\mu 2x}\,dx$

14. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ **β.** $\int_0^1 \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6}dx$

15. Αν $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^\nu x\,dx$, $\nu\in N^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_\nu=\frac{1}{\nu-1}I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu\geq 3$.

16. Αν $I_\nu=\int_0^e(\ell nx)^\nu\,dx$, $\nu\in N^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_\nu=e-\nu\cdot I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu\geq 1$.

17. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν: $f(\alpha)=f(\beta)=g(\alpha)=g(\beta)=0$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f''(x)\cdot g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g''(x)dx$

18. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\nu}(1-x)^{\mu}dx=\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu}dx \text{ με } \mu,\nu>0$$

20. Αν $I_{\nu}=\int_0^1 x^{\nu}\cdot e^x dx$, $\nu\in N$. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\geq 2$, $I_{\nu}=e-\nu\cdot I_{\nu-1}$ και να υπολογίσετε το I_3.

21. Να δείξετε ότι: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(2-x)dx$

22. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 x\cdot e^{-2x}dx$ **β.** $\int_0^1 x\cdot \ell n(4+x^2)dx$ **γ.** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}dx$

23. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^2 2x^2\cdot\eta\mu(x^3+2)dx$ **β.** $\int_0^{\ell n2}\frac{e^x}{e^x+2}dx$ **γ.** $\int_0^{2e}|\ell nx-1|dx$

24. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και για την οποία ισχύει: $f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,4]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x f(t)dt=4$ έχει μοναδική λύση στο $(0,4)$.

25. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f(x)+e^x$

(Γενικές Εξετάσεις 1996)

26. Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και ισχύουν: $\int_0^{\pi} f(x)+f''(x)\eta\mu x\,dx=2$ και $f(\pi)=5$ να βρείτε το $f(0)$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(x)+f(1-x)=x-x^2$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{12}$.

28. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $\int_3^x f(t)dt \geq x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in R$ να βρείτε το $f(3)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_3^x \sqrt{t^2 - 4}\,dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

30. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - t}\,dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

31. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F με τύπο $F(x) = \int_{\frac{1}{3}}^x \ell n(x - x^3)dt$

32. α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x)$, $x \in R$ αν και μόνο αν $f(x) = c \cdot e^x$, $x \in R$.

β. Αν $f(x) = \int_{-1}^x f(t)dt + 1$ να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f στο R.

33. Αν ισχύει $\int_{3^{2\lambda}+9^{\lambda}}^{11\cdot 4^{\lambda-1}+4^{\lambda+1}} f(x)dx = 0$ να βρείτε το $\lambda \in R$.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [–1,1], για την οποία ισχύει: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{-1} f(x)dx$ (1)
Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $g(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [–1,1].

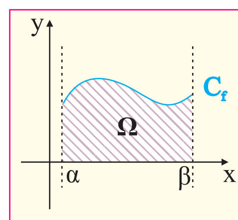
β. Η εξίσωση $f(x) + f(-x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες ρ_1, ρ_2 με $-1 < \rho_1 < 0 < \rho_2 < 1$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο [–1,1], τότε $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

Μάθημα **20**

Εμβαδόν

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

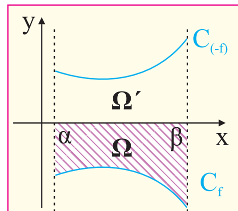


1.α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f (γραφική παράσταση της f) τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Παρατήρηση

Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\leq x\leq\beta$ και $0\leq y\leq f(x)$.



β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\leq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[-f(x)]dx.$$

Ισοδύναμη έκφραση του $E(\Omega)$**:**

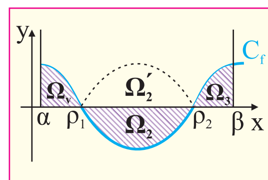
Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\leq x\leq\beta$ και $f(x)\leq y\leq 0$.

γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx.$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$
$$=\int_{\alpha}^{\rho_1} f(x)dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$$

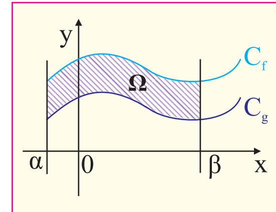


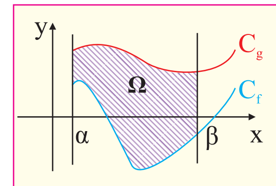
2. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[\alpha,\beta]$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

Ειδικότερα:

α. Αν $f(x)\geq g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta [f(x)-g(x)]dx$$



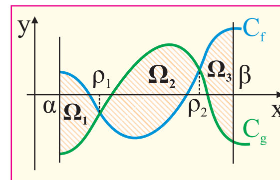


β. Αν $f(x)\leq g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx$$

γ. Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

τότε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$.



Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$

$$\int_\alpha^{\rho_1}(f(x)-g(x))dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(g(x)-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$.

Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

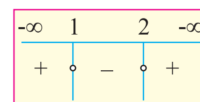
Παράδειγμα 1

Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2-3x+2$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$.

Λύση

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον $x'x$. Θέτουμε: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλαδή



$f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2+\infty)$ και

$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow x\in(1,2)$

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\frac{11}{6} \text{ τ.μ.}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f, την C_g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Αποδεικνύουμε ότι η $(f-g)$ είναι συνεχής.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $(f-g)$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=4x-x^2$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=3$.

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g:

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=4x-x^2\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$.

Είναι $f(x)-g(x)=x^2-4x+x^2=2x^2-4x=2x(x-2)$ οπότε

$f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ και

$f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow 2x(x-2)\leq 0\Leftrightarrow x\in[0,2]$

	0		2	
+	ο	−	ο	+

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,0]$ είναι $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

για κάθε $x\in[0,2]$ είναι $f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$

για κάθε $x\in[2,3]$ είναι $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Έτσι $E=\int_{-1}^0 (f(x)-g(x))dx+\int_0^2 (g(x)-f(x))dx+\int_2^3 (f(x)-g(x))dx=8$ τ.μ.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

α. Για να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$, θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E=\int_{\rho_1}^{\rho_\kappa}|f(x)|dx$, όπου ρ_1 η μικρότερη ρίζα της f και ρ_κ η μεγαλύτερη ρίζα της f.

β. Ομοίως όταν ζητείται να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την C_g, θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E=\int_{\rho_1}^{\rho_\kappa}|f(x)-g(x)|dx$, όπου ρ_1, ρ_κ η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^3-x$ και τον x΄x.

Λύση

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον x΄x. Είναι

x		-1		0		1	
f(x)	–		+		–		+

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$.

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλ.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x^3-x>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1+\infty)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x^3-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Άρα το εμβαδόν είναι: $E=\int_{-1}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=$

$$=\int_{-1}^{0} x^3dx-\int_{-1}^{0} xdx-\int_{0}^{1} x^3dx+\int_{0}^{1} xdx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$.

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g :

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^4+x^2=2x^4+2x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

- Μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$:

Είναι $f(x)-g(x)=3x^4+x^2-2x^4-2x^2=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$

	-1		1	
+	o	–	o	+

$f(x)-g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$: $f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le g(x)$

Άρα $E=\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-1}^{1}(-x^4+x^2)dx=...=\frac{4}{15}$ τ.μ.

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{2}{x}$ **και την ευθεία** $x+2y-5=0$.

Λύση

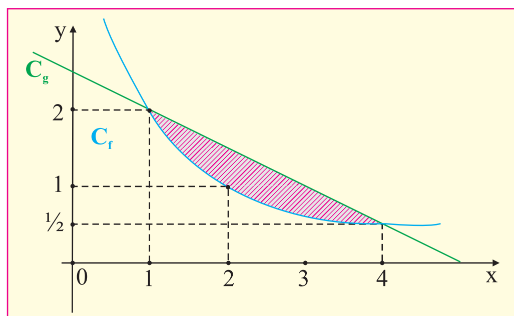
- Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων της $f(x)=\dfrac{2}{x}$ και της ευθείας $x+2y-5=0$.

Είναι

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2}{x} \\ x+2y-5=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{x} \\ y=\dfrac{5-x}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x}=\frac{5-x}{2} \Leftrightarrow 4=5x-x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases}$$



Είναι $E=\int_1^4 (g(x)-f(x))dx=\int_1^4\left(\dfrac{5-x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)dx=\dfrac{1}{4}(15-8\ell n4)$ τ.μ.

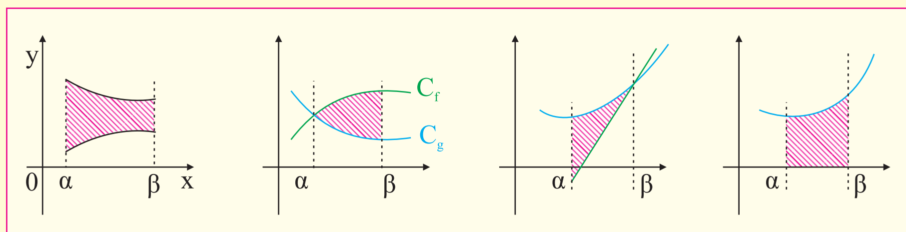
Κατηγορία – Μέθοδος 4

Στις περιπτώσεις που ο υπολογισμός του εμβαδού δεν είναι άμεσα υπολογίσιμος από τα προηγούμενα, χωρίζουμε την επιφάνεια σε επι μέρους χωρία που την επικαλύπτουν και είναι υπολογίσιμα. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι το άθροισμα των επι μέρους χωρίων.

Στην ίδια λογική της **επικάλυψης** είναι και η περίπτωση που βρίσκουμε το ζητούμενο εμβαδόν από την διαφορά υπολογίσιμων χωρίων.

Στον καθορισμό των χωρίων αποφασιστικό ρόλο παίζουν **οι γραφικές παραστάσεις** των συναρτήσεων του προβλήματος.

Τα χωρία θα καθορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις μόνο δύο συναρτήσεων και δύο κατακόρυφες ευθείες όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

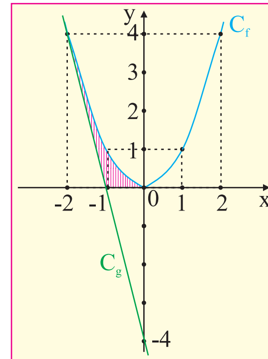


Παράδειγμα 6

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2,4)$ και τον άξονα x΄x.

Λύση

Βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(-2,4)$. Είναι



$$\left.\begin{array}{l} x_0=-2 \\ f(x_0)=f(-2)=(-2)^2=4 \\ f'(x)=2x \\ f'(x_0)=f'(-2)=-4 \end{array}\right\} \text{ και η εξίσωση της εφαπτομένης:}$$

ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-4=-4(x+2) \Leftrightarrow$

$y=-4x-8+4 \Leftrightarrow y=-4x-4$. Θέτουμε $g(x)=y=-4x-4$

σχεδιάζουμε την C_f και την ευθεία ε.

Βρίσκουμε που τέμνει η ευθεία τον x΄x. Για $y=0$ έχουμε $x=-1$.

Είναι $E=\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx=\frac{2}{3}$ τ.μ.

Παράδειγμα 7

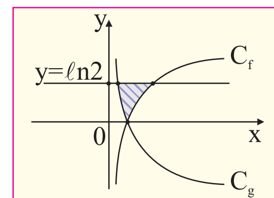
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ell nx$, $g(x)=\ell n\frac{1}{x}$ και την ευθεία $y=\ell n2$.

Λύση

Είναι $x>0$. Θέτουμε $h(x)=y=\ell n2$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g, h (ανά δύο).

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ell nx=\ell n\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$



$$\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \text{ απορ.} \end{cases}$$

Επίσης $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \ell nx=\ell n2 \Leftrightarrow x=2$

και $g(x)=h(x) \Leftrightarrow \ell n\frac{1}{x}=\ell n2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h με:

$f(x)=\ell nx$, $\qquad g(x)=\ell n\frac{1}{x}=-\ell nx$, $\qquad h(x)=y=\ell n2$

Είναι $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(h(x)-g(x))dx+\int_{1}^{2}(h(x)-f(x))dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ell n2+\ell nx)dx+\int_{1}^{2}(\ell n2-\ell nx)dx=$

$$=\ell n2\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ell nxdx+\ell n2\int_{1}^{2}dx-\int_{1}^{2}\ell nxdx=$$

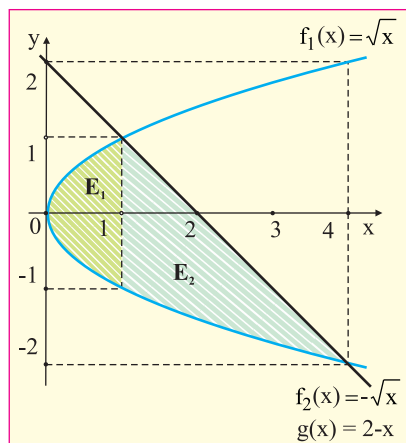
$$=\ell n2[x]_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x)'\,\ell nxdx+\ell n2[x]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}(x)'\,\ell nxdx=$$

$$=\ell n2\left[1-\frac{1}{2}\right]+[x\ell nx]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+\ell n2[2-1]-[x\ell nx]_{1}^{2}+\int_{1}^{2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{\ell n2}{2}+\left(1\ell n1-\frac{1}{2}\ell n\frac{1}{2}\right)-[x]_{\frac{1}{2}}^{1}+\ell n2-(2\ell n2-1\ell n1)+[x]_{1}^{2}=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y=2-x$ και $y^2=x$.



Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραμμών:

$$\left.\begin{aligned}y&=2-x\\ y^2&=x\end{aligned}\right\}(2-x)^2=x\Leftrightarrow 4-4x+x^2-x=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=4\end{cases}$$

- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις της ευθείας $y=2-x$ και της παραβολής $y^2=x$.

Είναι $E=2E_1+E_2$

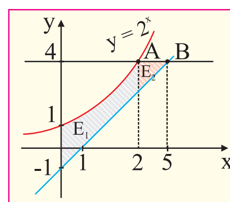
$$E=2\int_0^1 f_1(x)dx+\int_1^4(g(x)-f_2(x))dx=2\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^4(2-x+\sqrt{x})dx=$$

$$2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx+2\int_1^4 xdx+\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{27}{6}\ \text{τ.μ.}.$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις: $y=4$, $y=2^x$, $x=0$, $y=x-1$.



Λύση

Έστω Α το σημείο τομής της 2^x και της $y=4$ οπότε $2^x=4\Leftrightarrow x=2$

Έστω Β το σημείο τομής της $y=4$ και $y=x-1$ οπότε $x=5$.

Το Ε χωρίζεται σε E_1 και E_2 : $E = E_1 + E_2 = \int_0^2 [2^x - (x-1)]dx + \int_2^5 [4-(x-1)]dx =$

$$= \left[\frac{2^x}{\ell n2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \left(\frac{3}{\ell n2} + \frac{9}{2}\right) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 2

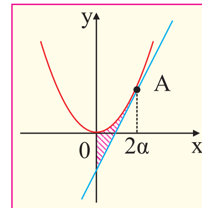
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$ και το σημείο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα y΄y και την εφαπτομένη στο Α.

Λύση

Η εφαπτομένη στο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$ έχει εξίσωση $y - 8\alpha^2 = 8\alpha(x - 2\alpha)$ αφού $f(2\alpha) = 4 \cdot 2\alpha = 8\alpha$ Είναι $y = 8\alpha x + 8\alpha^2 - 16\alpha^2 \Leftrightarrow y = 8\alpha x - 8\alpha^2$

επειδή $f''(x) = 8 > 0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα στο R οπότε $f(x) > g(x) = y = 8\alpha x - 8\alpha^2$.

Η σχετική θέση της C_f με την εφαπτομένη της $y = g(x)$ σε σημείο Α καθορίαζεται από το πρόσημο της $f''(x)$. Έτσι αν $f''(x) > 0$, $x \in \Delta$ τότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος Δ.



Το εμβαδόν του χωρίου είναι :

$$E = \int_0^{2\alpha} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{2\alpha} (2x^2 - 8\alpha x + 8\alpha^2)dx = \frac{16\alpha^3}{3} \text{ τ.μ.}.$$

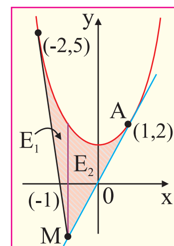
Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ και $M\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από το Μ στην καμπύλη της f και στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις παραπάνω εφαπτόμενες.

Λύση

Έστω (x_0, y_0) ένα σημείο επαφής. Το $M \notin C_f$, άρα βρίσκουμε τα σημεία επαφής λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$, όπου (x, y) οι συντεταγμένες του Μ, δηλαδή

$$\left.\begin{matrix} -1 - y_0 = -x_0 - 2x_0^2 \\ y_0 = x_0^2 + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x = g_1(x) \\ y = -4x - 3 = g_2(x) \end{cases}$$



Η ευθεία $x = -\frac{1}{2}$ χωρίζει το χωρίο σε δύο χωρία, οπότε:

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-2}^{-1/2} [f(x) - g_2(x)]dx + \int_{-1/2}^{1} [f(x) - g_1(x)]dx =$$

$$\int_{-2}^{-1/2} [x^2 + 1 - (-4x - 3)]dx + \int_{-1/2}^{1} (x^2 + 1 - 2x)dx = \frac{57}{8} - \frac{33}{8} = 3 \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 4

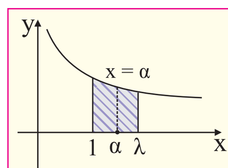
Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ $(\lambda>0)$.

i. Να υπολογίσετε το $E(\lambda)$.

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.

iii. Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

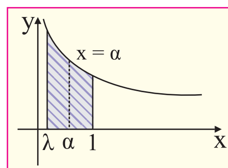
Λύση



i. Η f είναι συνεχής και $f(x)>0$, $x\in R$.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις $\lambda>1$ και $0<\lambda<1$.

Αν $\lambda>1$ τότε $E(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)dx=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\lambda}=-\frac{1}{\lambda}+1$



Αν $0<\lambda<1$ τότε $E(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f(x)dx=\int_{\lambda}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{\lambda}^{1}=-1+\frac{1}{\lambda}$

ii. Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}+1\right)=1$ και

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\lambda}\right)=+\infty$

iii. Για τον προσδιορισμό του α θα πρέπει να ισχύει:

Αν $\lambda>1$, τότε $\int_1^{\alpha} f(x)dx=\frac{E(\lambda)}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\alpha}+1=\frac{-\frac{1}{\lambda}+1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\alpha}=\frac{\lambda-1}{2\lambda}-1\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$.

Αν $0<\lambda<1$, τότε $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx=\frac{E(\lambda)}{2}\Leftrightarrow-1+\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\frac{1}{\lambda}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}=\frac{1-\lambda}{2\lambda}+1\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$.

Άσκηση 5

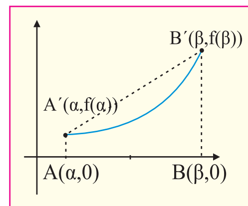
Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$, $f(\alpha)>0$ και γνησίως αύξουσα με τα κοίλα άνω. Να δειχθεί η σχέση: $f(\alpha)(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\le\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$

Λύση

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$:

Είναι $\alpha\le x\Leftrightarrow f(\alpha)\le f(x)$ οπότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha)dx\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ή $(\beta-\alpha)f(\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (1)

Πρέπει να δείξουμε την ανισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η χορδή $A'B'$ είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f. Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου με κορυφές τα σημεία $A'(\alpha, f(\alpha))$, $B'(\beta, f(\beta))$, $B(\beta,0)$, $A(\alpha,0)$ είναι μεγαλύτερο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την $x=\alpha$, $x=\beta$, τον $x'x$ και την C_f και είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Είναι



$E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(AA'+BB')AB}{2} = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$ οπότε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$ (2). Από (1) και (2) εδείχθη το ζητούμενο.

Άσκηση 6

i. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις $x=2$, $x=3$ για $f(x)=x^2+2x-3$.

ii. Ομοίως για την $f(x)=x^2-2x$ και $x=0$, $x=3$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $f(x)\geq 0$, για $x\in[2,3]$.

Άρα $E=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 (x^2+2x-3)dx=\frac{25}{3}$ τ.μ..

ii. Προφανώς η f έχει ρίζες 0, 2 και $f(x)\geq 0$, για $x\in[2,3]$ ενώ $f(x)\leq 0$, για $x\in[0,2]$.

Άρα $E=\int_0^2[-f(x)]dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{8}{3}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in R$.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και τα σημεία καμπής της C_f

iii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική ασύμπτωτη την $y=0$.

iv. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της f.

v. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, την οριζόντια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ με $\lambda>0$ να δείξετε ότι $E(\lambda)=2\int_0^{\lambda} f(x)dx$.

vi. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων x και $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Η e^{-x^2} είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση της $(-x^2)$ με την e^x. Είναι $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

ii. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των $e^{-\frac{x^2}{2}}$ και $(1-x^2)$

Είναι $f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(1-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x)$

$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)=e^{-\frac{x^2}{2}}[x(x^2-3)]$

με $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$

Η f είναι κυρτή όταν $f''(x)\geq 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $[-\sqrt{3},0]$, $[\sqrt{3},+\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα σημεία με τετμημένες $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f(x)	∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	Σ.Κ.	∪

iii. Η $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ως συνεχής συνάρτηση στο R **δεν** έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}x}=0$

Άρα ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y=0\cdot x+0$ ή $y=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\underset{x^2=y}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}e^{-\frac{y}{2}}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}x}=0$.

Άρα ασύμπτωτη και στο $-\infty$ είναι η $y=0$.

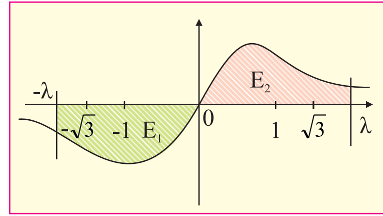
Υπενθύμιση

Η $y=\alpha x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στην C_f στο $+\infty$ όταν $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]$

iv. **Πίνακας μεταβολών**

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗		↘		↘
		ΣΚ		ΤΕ		ΣΚ		ΤΜ		ΣΚ	

Η γραφική παράσταση



v. Η f είναι ***περιττή*** αφού για κάθε $x \in R$ είναι $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -f(x)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x = -\lambda$, $x = 0$ και την $y = 0$ είναι $E_1 = \int_{-\lambda}^{0} -f(x)dx$ αφού $f(x) < 0$. (Θέτουμε $x = -t$ οπότε $dx = -dt$ για $x = 0$ είναι $t = 0$ ενώ για $x = -\lambda$ είναι $t = \lambda$).

Έτσι $E_1 = \int_{\lambda}^{0} -f(-t)(-dt) = -\int_{\lambda}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{\lambda} f(t)dt = E_2$ επομένως

$E = E_1 + E_2$ οπότε $E(\lambda) = 2\int_{0}^{\lambda} f(x)dx$.

vi. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\lambda} f(x)dx = \int_0^{\lambda} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int_0^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)'dx =$

$= -\int_0^{\lambda}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx = -\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\lambda} = -\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}} - e^0\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ οπότε $E(\lambda) = 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)$ και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right) = 2(1-0) = 2$ τ.μ.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ και τον άξονα x΄x.

2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = |\ell nx|$ και την ευθεία $y = 1$.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 - 5x^2$, $g(x) = x^3 - 4x^2$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$.

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{6}{x-1} - 3$ και την ευθεία $3x + y - 9 = 0$.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3+x^2-x-2$.

6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ημx$, $g(x)=συνx$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{π}{2}$.

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $f(x)=e^x$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,e)$. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δύο αυτές εφαπτόμενες και την C_f.

8. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=4-x^2$, $g(x)=2x-1$ και των ευθειών $x=-2$ και $x=2$.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο $(1,1)$ και τον άξονα x΄x.

10. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{3}(x+1)$ αντίστοιχα.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

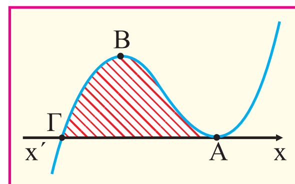
Α. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της καμπύλης $y = x^3 - 12x + 16$.

Να υπολογίσετε:

α. Τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Τις συντεταγμένες του Γ, του σημείου δηλαδή που η καμπύλη $y = x^3 - 12x + 16$ τέμνει τον άξονα x΄x.

γ. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



Β. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Με $E(κ)$, $κ\in(0,1)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = f(κ)$. Να βρεθεί ο κ ώστε το $E(κ)$ να γίνεται ελάχιστο.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Επαναληπτικά - Συνδυαστικά Θέματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Α. Να βάλετε σε κύκλο την σωστή απάντηση. (Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)

1. Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ακτίνα ενός κύκλου είναι 0,5 cm/sec. Με ποιο ρυθμό μειώνεται η επιφάνειά του όταν η ακτίνα του είναι 4 cm

Α. 4π **Β.** 2π **Γ.** 8π **Δ.** $\frac{\pi}{2}$ **Ε.** $\frac{\pi}{4}$

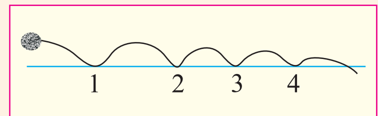
2. Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R τότε η τιμή του ορίου $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h^2)-f(x-h^2)}{2h^2}$ είναι:

Α. $4f'(x)$ **Β.** $2f'(x)$ **Γ.** $f'(x)$ **Δ.** $\frac{f'(x)}{2}$

3. Αν η $f(x)=\begin{cases} x^2+x-3, & x\le 1 \\ \alpha x+\beta, & x>1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο R τότε:

Α. $\alpha=3, \beta=-2$ **Β.** $\alpha=-2, \beta=1$, **Γ.** $\alpha=3, \beta=-4$, **Δ.** $\alpha=1, \beta=-4$

4. Πετάμε μια πέτρα στη θάλασσα η οποία αφού κάνει 4 αναπηδήσεις μετά βυθίζεται. Πόσες είναι οι χρονικές στιγμές που η στιγμιαία ταχύτητα της πέτρας θα είναι ίση με το μηδέν



Α. 5 **Β.** 6 **Γ.** 9 **Δ.** 7 **Ε.** 8

5. Αν $f(x)=2|x-1|+(x-1)^2$ τότε $f'(0)$ είναι

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** -4 **Ε.** Δεν υπάρχει

6. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(x)=f|1-x|$ τότε $f'(0)$ είναι ίση με:

Α. $f(0)$ **Β.** $f(1)$ **Γ.** $-f'(0)$ **Δ.** $f'(1)$ **Ε.** $-f'(1)$

7. Το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{(1+x)\ell n(1+x)}$ ισούται με:

Α. -2, **Β.** $\frac{1}{2}$, **Γ.** 0 **Δ.** $+\infty$ **Ε.** 2

8. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+h\right)-\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{h}$ ισούται με

Α. $-\dfrac{\pi}{3}$ **Β.** -3 **Γ.** $-\dfrac{1}{3}$ **Δ.** $-\dfrac{4}{3}$ **Ε.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ ισούται με

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** π **Δ.** $+\infty$

10. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=2$ και $f(1)=0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Α. Αδύνατη **Β.** Έχει τουλάχιστον μία ρίζα,
Γ. Έχει το πολύ μία λύση **Δ.** Έχει ακριβώς μία λύση

11. Αν η f είναι συνεχής στο R με $f(x)\neq 0$, $x\in R$ και $f(1)=-5$ τότε το

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(\alpha)-1)x^3-5x^2+\alpha x-2}{x^2-1}$ είναι ίσο με

Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** $f(\alpha)-1$ **Δ.** $1-f(-\alpha)$ **Ε.** -5

12. Το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t+t^2}{1+\eta\mu t}dt$ ισούται με:

Α. $\dfrac{1}{2\pi}$ **Β.** $\dfrac{1}{\pi}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** 0 **Ε.** 1

13. Ποια είναι η τιμή του ολοκληρώματος $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^x xydy\right)dx$

Α. $\dfrac{y^3}{2}$ **Β.** $\dfrac{1}{8}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$

Δ. $\dfrac{x^3}{4}$ **Ε.** 1 **Ζ.** $\dfrac{1}{4}$

14. Αν $\displaystyle\int_0^\alpha(10x^2+6x+1)dx=0$ τότε ο αριθμός α είναι ίσος με:

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** 3 **Ε.** -1

15. Αν $\int_{-\kappa}^{\kappa}(x^2-1)dx=0$ με $\kappa>0$ τότε ο αριθμός κ είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** $\sqrt{2}$ **Δ.** $\sqrt{3}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$

16. Το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από τις $y=x^3$, $y=8x$ και $y=8$ είναι ίσο με

Α. 4 **Β.** 6 **Γ.** 8 **Δ.** 10 **Ε.** 12

17. Για ποια τιμή του x η συνάρτηση $f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

Α. $\frac{\pi}{6}$ **Β.** $\frac{\pi}{3}$ **Γ.** $\frac{\pi}{2}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{2\pi}{3}$

18. Αν $P'(0)=P'(2)$ τότε το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{2}xP''(x)dx$ είναι

Α. $2P'(2)$ **Β.** $2P(2)$ **Γ.** $2(P(2)-P'(2))$ **Δ.** $4P(2)$

19. Το εμβαδόν του χωρίου Ε που δημιουργείται από τα σημεία $M(x,y)$ με $0\le x\le 1$ και $x^3\le y\le\sqrt[3]{x}$ εκφράζεται από το ολοκλήρωμα

Α. $\int_{0}^{1}(x^3-\sqrt[3]{x})dx$ **Β.** $\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x}\,dx$ **Γ.** $\int_{0}^{1}(x^3-x)dx$

Δ. $\int_{0}^{1}(\sqrt[3]{x}-x^3)dx$ **Ε.** $\int_{-1}^{1}|x^3-\sqrt[3]{x}|dx$

20. Σε πόσα σημεία η γραφική παράσταση της καμπύλης $y=x^5+x^3+2x+2$ τέμνει τον άξονα x΄x

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5

21. Η καμπύλη $2x^2-3x-2xy-y=6$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες:

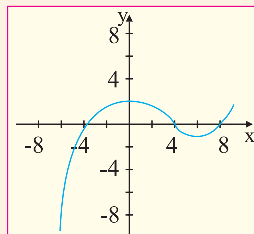
Α. $x=-\frac{1}{2}$ **Β.** $x=-\frac{1}{2}$ και $y=x+1$

Γ. $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ και $y=x+1$ **Δ.** $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=x+1$ και $y=-x-1$

22. Η $f(x)=x^{\kappa}e^{-x}$, $x\in R$, $\kappa>0$ έχει μέγιστη τιμή

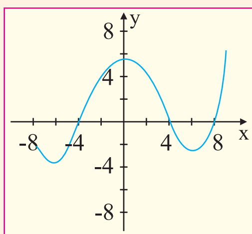
Α. κ **Β.** $\frac{e}{\kappa}$ **Γ.** $\left(\frac{\kappa}{e}\right)^{\kappa}$ **Δ.** $\left[\ell n\left(\frac{e}{\kappa}\right)\right]^{\kappa}$

23. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f'(x)$.

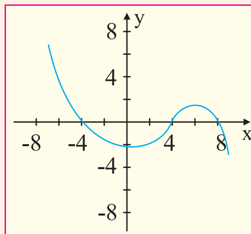


Ποια από τις παρακάτω καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της $y = f(x)$.

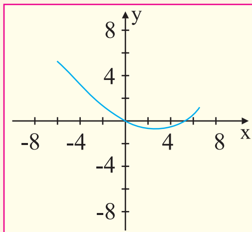
Α.



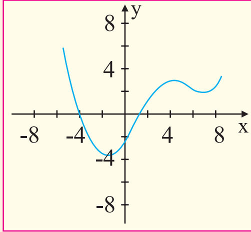
Β.



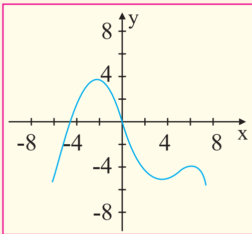
Γ.



Δ.



Ε.



Β. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) (Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος)

1. Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2$ **Σ** **Λ**

2. Αν $z, w \in C$ και $z^2 + w^2 = 0$ τότε $z = 0$ και $w = 0$. **Σ** **Λ**

3. Αν $\frac{z_1}{z_2} = \kappa$, $\kappa > 0$ τότε τα σημεία O, M_1, M_2 είναι συνευθειακά **Σ** **Λ**

4. Αν η f είναι “1-1” στο A και η g είναι “1-1” στο A τότε η $f+g$ είναι “1-1” στο A. Σ Λ

5. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και η g είναι γνησίως αύξουσα στο A τότε η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A. Σ Λ

6. Αν η $g(x)$ είναι περιοδική στο R τότε η (fog) είναι περιοδική στο R. Σ Λ

7. Υπάρχει περιοδική συνάρτηση που είναι “1-1” στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ

8. Αν η f είναι περιττή και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(1, f(1))$ τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $(-1, -f(1))$. Σ Λ

9. Ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f$. Σ Λ

10. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A τότε οι C_f, C_g τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. Σ Λ

11. Αν $f(0) = 2$ τότε η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τον $x = 2$ με δεδομένο ότι η f είναι “1-1”. Σ Λ

12. Υπάρχει συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα τέτοια ώστε $f(f(x)) = e^{-x}$. Σ Λ

13. Αν η αντιστρέψιμη συνάρτηση f έχει μια ρίζα στο R τότε και $f^{-1}(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο R. Σ Λ

14. Αν η $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι συνεχής στο Δ τότε οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο Δ. Σ Λ

15. Αν η g είναι συνεχής στο x_0, η f δεν είναι συνεχής στο x_0, $x_0 \in A_f \cap A_g$ υπάρχει συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$ που είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

Σ Λ

16. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{x - x_0} = 8$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ Σ Λ

17. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ

18. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ τότε είναι $f(x) > 0$ για τα x που είναι κοντά στο x_0. Σ Λ

19. Αν $f(x) < g(x)$ για τα x που ανήκουν στο $A = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Σ Λ

20. Αν $f(x) > g(x)$ για τα $x \in A$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$. Σ Λ

21. Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Σ Λ

22. Αν η f είναι συνεχής και "1-1" στο R τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο R. Σ Λ

23. Αν η f είναι συνεχής και "1-1" στο R τότε είναι γνησίως μονότονη στο R. Σ Λ

24. Αν η $|f|$ είναι συνεχής στο R τότε η f είναι συνεχής στο R. Σ Λ

25. Είναι $\lim_{x \to 0} \frac{ημ(εφx)}{εφ(ημx)} = 1$. Σ Λ

26. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(α, β]$ τότε $f(β) \leq f(x) < \lim_{x \to α^+} f(x)$. Σ Λ

27. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(α, β]$ τότε $f((α, β]) = \left[f(β), \lim_{x \to α^+} f(x)\right)$ Σ Λ

28. Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση στο R με σύνολο τιμών το B, $B \subseteq Q$ Σ Λ

29. Η $f(x) = \sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Σ Λ

30. Η $f(x) = \sqrt{x-1}(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Σ Λ

31. Υπάρχει συνάρτηση που εφάπτεται σε ευθεία σε άπειρα σημεία. Σ Λ

32. Υπάρχει συνάρτηση που εφάπτεται σε άπειρα σημεία μιας ευθείας των οποίων οι τετμημένες ανήκουν σε διάστημα $(α, β)$. Σ Λ

33. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

34. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η $f'(x_0)$ είναι είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

35. Η C_f εφάπτεται $\left.\begin{matrix} \text{στον } x'x \\ \text{στο } x_0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$. Σ Λ

36. Η C_f εφάπτεται στην ευθεία

$\left.\begin{matrix} y = αx + β \\ \text{στο } (1, f(1)) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f'(1) = α \text{ και } f(1) = α + β$. Σ Λ

37. Αν η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 4$ είναι 12 τότε $f'(4) = 12$ **Σ** **Λ**

38. Αν $f(1) = -1$ και $f(5) = 5$ και ισχύει ο διπλανός πίνακας τότε η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R. **Σ** **Λ**

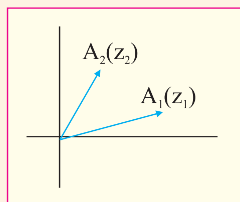
x	-∞		1		+∞
f′(x)		−	0	+	

39. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f'(x) < g'(x)$. **Σ** **Λ**

40. Αν $h(x) \le h(5)$ για τα $x \in R$ και η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 5, τότε $h'(5) = 0$. **Σ** **Λ**

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά των προτάσεων με τις κατάλληλες λέξεις - τύπους - αριθμούς. (Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού)

1. Στο διπλανό σχήμα να προσδιορίσετε τα σημεία Β και Δ ώστε $B(z_1 + z_2)$ και $\Delta(z_1 - z_2)$.



2. Αν $|z| = 1$ τότε $\bar{z} =$ ....

3. Αν $|z| = \rho$ τότε $\bar{z} =$ ....

4. Αν $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ και $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$ είναι ....

5. Αν $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$ και $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$ είναι .... και μάλιστα μεγαλύτερο μέτρο έχει το ....

6. $(1+i)^{2\nu} =$ .... και $(1-i)^{2\nu} =$ ....

7. Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ και το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ τότε η σχέση που συνδέει τους z_1, z_2, z_3 είναι ....

8. Αν $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ και $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$, $A_3(z_3)$, $A_4(z_4)$ τότε το $A_1A_2A_3A_4$ είναι ....

9. Έστω η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $z \in C$, $\Delta < 0$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Τότε:

$z_1 + z_2 =$ ...., $z_1 \cdot z_2 =$ ...., $z_1^{100} + z_2^{100} \in$ ...... αριθμούς.

10. Αν $|z|^2 = -z^2$ τότε ο z είναι .... αριθμός.

11. Αν $P(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και $z \in C$ τότε $P(z) \cdot P(\bar{z}) =$ ....

12. Αν $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ τότε το τρίγωνο A_1OA_2 είναι .... όπου A_1A_2 εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα.

13. Αν $\dfrac{z_1}{z_2} = \kappa$, $\kappa \in R$ και $O(0,0)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ τότε τα σημεία O, M_1, M_2 είναι ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΎΠΟΥ

Θέμα 1ο

Αν υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ ώστε οι εξισώσεις: $\left(1+x^2\right)\alpha-\beta=4\left(1-x^2\right)-\frac{6x}{1+x^2}$ και $\alpha x^4+\beta\left(1+x^2\right)=2x\frac{1-x^2}{1+x^2}\left(2x^3+3\right)$ να έχουν κοινή λύση τότε να αποδειχθεί ότι η εικόνα του $z=\alpha+\beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κωνική τομή (c) της οποίας να προσδιοριστούν τα στοιχεία.

Θέμα 2ο

Α. Υπολογίστε στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών τις λύσεις z_1 και z_2 της εξίσωσης $z^2-4z+29=0$ και τις λύσεις z_3, z_4 της εξίσωσης $z^2+4z+13=0$. Έστω z_1, z_3 οι λύσεις που έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Να αναπαραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, I που είναι εικόνες των αριθμών z_1, z_2, z_3, z_4,2.

Β. Υπολογίστε το $\left|z_3-2\right|$. Δείξτε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. Να κατασκευάσετε αυτόν τον κύκλο στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Θέμα 3ο

Θεωρείστε το σύστημα $\begin{matrix}\left|z-2\right|=5\\ z-\overline{z}=6i\end{matrix}$. Προτείνετε μια γεωμετρική ερμηνεία του συστήματος αυτού και στη συνέχεια λύστε το γραφικά.

Θέμα 4ο

Το επίπεδο έχει εφοδιαστεί με ένα ορθοκανονικό σύστημα $\left(0,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Σε σημείο M που έχει εικόνα τον αριθμό $z=x+iy$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχούμε το σημείο M΄ που είναι εικόνα του $z'=z^2+2z$.

Α.α. Υπολογίστε τις συντεταγμένες $\left(x',y'\right)$ του σημείου M΄ συναρτήσει των συντεταγμένων $\left(x,y\right)$ του σημείου M.

β. Δείξτε ότι το σύνολο (H) των σημείων του επιπέδου, που είναι τέτοια ώστε το z΄ να είναι φανταστικός αριθμός, είναι μια υπερβολή της οποίας και να προσδιορίσετε το κέντρο της, τις κορυφές της και τις ασύμπτωτές της. Να σχεδιάσετε την (H).

Β. Έστω Ω το σημείο που είναι εικόνα του αριθμού -1. Προσδιορίστε τα σημεία M του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε το τετράπλευρο OMM΄Ω να είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 5ο

Α. Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων N του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση $(3-2i)z + (3+2i)\bar{z} - 12 = 0$ (1) είναι μια ευθεία (D), την οποία να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός z_0 και μοναδικός φανταστικός z_1 που επαληθεύουν την εξίσωση (1). Υπολογίστε τον z_0 και τον z_1.

Β. Έστω Α και Β τα σημεία που είναι εικόνες των αριθμών $3+5i$, $-3+i$ αντίστοιχα. Αναπαραστήστε τα Α και Β στο προηγούμενο σχήμα. Δείξτε ότι η ευθεία (D) είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΑΒ.

Γ. Ποιο είναι το σύνολο των σημείων Μ του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι εικόνες των αριθμών z που επαληθεύουν την εξίσωση $|3+5i-z| = |-3+i-z|$;

Θέμα 6ο

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $C - \{-4\}$ και τύπο: $f(z) = \dfrac{z-2i}{iz-4}$, όπου C είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των σημείων M(z) ώστε να είναι $f(z) \in R$.

β. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των σημείων M(z) ώστε το μέτρο του $f(z)$ να είναι 2.

Θέμα 7ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to R$ με $f(x) = 2x$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{2\text{συν}x - 1}$ και πεδίο ορισμού το ευρύτερο δυνατό.

α. Να βρεθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $h(x) - (g o f)(x) = g(f(x))$.

β. Να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών $w(h)$ της παραπάνω συνάρτησης $h(x)$ και να εξηγηθεί γιατί δεν μπορεί να είναι συνάρτηση η αντίστροφη σχέση της h, από το $w(h)$ στο $D(h)$.

Θέμα 8ο

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί, α, β, γ ώστε η συνάρτηση f, που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \alpha x + 3}{x-3}, & \text{αν} \quad x < 3 \\ \dfrac{\beta x + \gamma}{x^2 - 3x}, & \text{αν} \quad x > 3 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο 3 (δηλαδή όταν $x \to 3$) και να υπολογιστεί αυτό το όριο.

Θέμα 9ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = (x-1)συν\dfrac{2\pi}{x^2-1}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$.

Θέμα 10ο

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & με\ x \le 4 \\ \dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-4}, & με\ x > 4 \end{cases}$.

Να οριστεί η τιμή της παραμέτρου $\alpha \in R$ (εφόσον υπάρχει) έτσι ώστε η συνάρτηση που προκύπτει από τον παραπάνω τύπο να είναι συνεχής στο R.

Θέμα 11ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f συνεχή στη θέση $x = 2$ και τέτοια ώστε να είναι

$\lim\limits_{x\to2} = \dfrac{(x-2)f(x) + συν\dfrac{\pi x}{4}}{(x-2)^2} = 3$. Να προσδιοριστεί η τιμή $f(2)$

Θέμα 12ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to R$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$. Να προσδιοριστεί το $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f^2(x+3h) - f^2(x+h)}{h}$ (υποτίθεται: $x,\ x+h,\ x+3h \in A$).

Β. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στη θέση $x_0 = 1$

α. Να εκφρασθούν τα $I = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - x^2 f(1)}{x-1}$ και $II = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(1)\cdot f(x) - g(x)\cdot f(1)}{x-1}$ συναρτήσει των τιμών των f, g και των παραγώγων αυτών στη θέση $x = 1$.

β. Αν $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$ ενώ $g(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot f(x)$ με πεδίο ορισμού το R^* να καθοριστούν οι τιμές των I και II.

Θέμα 13ο

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στην θέση $x = 1$.

α. Να εκφραστούν τα όρια: $K = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - x^2 f(1)}{x-1}$ και $\Lambda = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(1)f(x) - g(x)f(1)}{x-1}$ συναρτήσει των τιμών των f, g και των παραγώγων αυτών στη θέση $x = 1$.

β. Αν $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ με $x \in R$ ενώ $g(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}$ με $x \in R - \{-1\}$, τότε να καθοριστούν οι τιμές των K και Λ για αυτές τις συναρτήσεις f και g.

Θέμα 14ο

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$ με εικόνες Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα επί του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ τότε:

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι: $z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$.

β. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\gamma} - \bar{\delta}}{\bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\delta}}$ έχει εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο τομής των χορδών ΑΒ και ΓΔ (εφόσον αυτές τέμνονται).

Θέμα 15ο

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, άρτια και παραγωγίσιμη στο R. Ορίζουμε ακολούθως συνάρτηση g, σύμφωνα με τον τύπο: $g(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)f(x) + x$. Ν'αποδειχθεί ότι $g'(0) = 1$.

Θέμα 16ο

Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R με: $g(x) > 0$ για κάθε πραγματικό x και $g(0) = e - 1$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = (1 + g(x))^x$ στο σημείο της $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 45^0.

Θέμα 17ο

Να βρεθεί ο α, α>0 ώστε η $y = x$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$.

Θέμα 18ο

Δίνονται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x + 1$ με $x \in R$ και η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Να προσδιοριστούν τέτοιες τιμές των α,β (εφόσον υπάρχουν) ώστε οι γραμμές με εξισώσεις $y = g(x)$ και $y = f^{(4)}(x)$ να έχουν κοινό το σημείο $A(1, g(1))$ και συγχρόνως κοινή εφαπτομένη σ'αυτό.

Θέμα 19ο

Αντλία της πυροσβεστικής αποβάλλει ποσότητα νερού, από πλημμυρισμένο υπόγειο με ρυθμό $N'(t) = \dfrac{t+1}{e^{-t}}$ σε κιλά ανά ώρα, όπου t οι ώρες λειτουργίας της αντλίας.

α. Να βρεθεί η ποσότητα του νερού που βγήκε από το υπόγειο τις 6 τελευταίες ώρες της λειτουργίας της, αν είναι γνωστό ότι αυτή άρχισε να λειτουργεί πριν από 10 ώρες.

β. Αν είναι γνωστό ότι την 5η ώρα της λειτουργίας της αντλήθηκαν $\dfrac{100}{e^6}$ κιλά νερού, πόσα κιλά αντλήθηκαν κατά την 8η ώρα της λειτουργίας της αντλίας.

Θέμα 20ο

Ένα μπαλόνι είναι 39m πάνω από το έδαφος και ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα 1m/sec. Ένα αυτοκίνητο περνά από κάτω από το μπαλόνι και προχωρά κάτα μήκος ενός ίσιου δρόμου με σταθερή ταχύτητα 30m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτοκινήτου - μπαλονιού στο πρώτο δυτερόλεπτο της κίνησης.

Θέμα 21ο

Να λυθεί στο R η εξίσωση: $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$.

Θέμα 22ο

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: **α.** $\int_1^2 e^{x^3 + 2\ell nx} dx$, **β.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{ημ2x} dx$.

Θέμα 23ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = α^2x^6 + βx^4 + x^2 + γx + δ$ με α, β, γ, δ∈ R και $3β^2 < 5α^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

Θέμα 24ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 6] με $f(0) = 2$ και $1 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (0, 6)$, να αποδείξετε ότι: $8 \le f(6) \le 26$.

Θέμα 25ο

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(e^x) = x - e^x$ για κάθε $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι: $f(x) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$

β. Να δείξετε ότι: $f'(α)(x-α) > f(x) - f(α)$ για $x \in (α, +\infty)$ και $α > 0$

Θέμα 26ο

Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ παραγωγίσιμη στο R με $f(-2) = -4$ και $f(2) = 4$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 1$.

Θέμα 27ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(α) = f(β)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $ξ_1, ξ_2 \in (α, β)$ ώστε $f'(ξ_1) + f'(ξ_2) = 0$.

Θέμα 28ο

Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R και τη σταθερή συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=e^{-2x}f'(x)+\kappa$ και $f'(x)>0$ όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός.

α. Δείξτε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $f''(x)=2f'(x)$.

β. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=\ell nf'(x)-2x+1$ είναι σταθερή στο R.

γ. Να βρεθεί η σταθερή συνάρτηση h εάν η C_f στο σημείο $x_0=0$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

δ. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f εάν $f(0)=\frac{3}{2}$.

Θέμα 29ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει: $|f(x)-f(y)|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να δειχτεί ότι η f είναι σταθερή στο R.

Θέμα 30ο

Να προσδιορισθεί η εξίσωση $y=f(x)$ καμπύλης (k) εφόσον αυτή κείται μέσα στην πρώτη γωνία των αξόνων (ορθοκανονικού συστήματος) και εκπληρώνει τους ακόλουθους όρους:

α. Η (k) διέρχεται από το σημείο $P(2,\ 2)$.

β. Η f(x) είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R_+^* με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ. Αν η εφαπτομένη ευθεία της (k) σ'ένα οποιοδήποτε σημείο της $A(x,\ f(x))$ τέμνει τον άξονα x΄x στο Β και τον άξονα y΄y στο Μ, τότε το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Θέμα 31ο

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $f'(x)=y'(x)+\eta\mu^2x+e^x$ με $x\in[0,+\infty)$.

Να δείξετε ότι: $f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$ για $x\in(0,+\infty)$

Θέμα 32ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $2xe^{2(x^2-1)}+x-3=0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{x^2-1}$ και ο μιγαδικός $z=(\alpha-3)+f(\alpha)i$ όπου $\alpha\in R$. Να αποδειχθεί ότι $|z|\ge\sqrt{5}$.

Θέμα 33ο

Α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=e^x(x^2+3)+7x-3$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $e^x(x^2+3)-7x^2=e^{x^2}(x^4+3)-7x$ στο R.

Θέμα 34ο

Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει η ανισότητα $\ell n(1-x^2) < x + \frac{1}{2}$.

Θέμα 35ο

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. Αν η f είναι συνεχής στη θέση 1, τότε ν'αποδειχθεί ότι αυτή θα είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R$.

Β. α. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 1$ ισχύει: $\ell n x_2^{x_1} - \ell n x_1^{x_2} < \ell n x_2 - \ell n x_1$.

β. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $\kappa > 0$ και για κάθε $x_1, x_2 \in R_+^*$ με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει:

$x_2 e^{-\kappa x_1} - x_1 e^{-e\kappa x_2} < x_2 - x_1$.

Θέμα 36ο

Ένα φυτό αναπτύσσεται ως προς το χρόνο έτσι ώστε κάθε χρονική στιγμή το ύψος του να δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = \frac{2e^{t-10}}{e^{t-10} + e^{-t+10}}$, $0 \le t \le 20$

α. Να βρεθεί συνάρτηση του χρόνου που δίνει κάθε χρονική στιγμή το ρυθμό με τον οποίο "ψηλώνει" το φυτό.

β. Αν Μ είναι η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής του ύψους του φυτού τότε να υπολογιστεί το Μ και η χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή η μέγιστη τιμή λαμβάνεται.

Θέμα 37ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^3 + 3^x + \ell n(x^3+1)$ και $g(x) = -x + 5^{-x} + \ell n(2^{-x})$ με $x \in (-1, +\infty)$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σ'ένα μόνο σημείο.

Θέμα 38ο

Α. Συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ'ένα διάστημα Δ. Αν η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ, τότε ισχύει: $f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \ne x_2$.

Β. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta = (0, \pi)$ με $x_1 \ne x_2$ αληθεύει η ανισότητα:

$$\eta\mu x_1 + \eta\mu x_2 < 2\eta\mu\frac{x_1+x_2}{2}$$

Θέμα 39ο

Έστω η f ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Α. Αν η f είναι κοίλη στο Α να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+2003\beta}{2004}\right)\geq\frac{f(\alpha)+2003f(\beta)}{2004} \text{ με } \alpha,\beta\in A.$$

Θέμα 40ο

Εάν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου να αποδείξετε ότι ισχύει πάντα η ανίσωση:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3\geq 27(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

Θέμα 41ο

Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει η σχέση:

$$e^{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta-2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}$$

Θέμα 42ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Αν η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο R και δεν είναι "1 - 1" τότε να αποδείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Θέμα 43ο

Θεωρείστε τις συναρτήσεις $f(x)=e^{-2x}$ και $g(x)=x^2$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Θέμα 44ο

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε να είναι

$f'(x)=\frac{-f(x)}{2x}$ για κάθε $x\in\Delta$.

α. Αν g είναι η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο: $g(x)=\sqrt{x}\cdot f(x)$ με πεδίο ορισμού Δ, ν'αποδειχθεί ότι η g είναι μια συνάρτηση σταθερή στο Δ.

β. Αν $P(4,1)$ είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης, έστω C_f, της $y=f(x)$, να προσδιορισθεί ο τύπος της f και να μελετηθεί αυτή ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Να καθορισθούν επίσης όσες ασύμπτωτες διαθέτει η C_f.

Θέμα 45ο

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\frac{2x^2+x-13}{x^2-x-2}$.

α. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in A$ έχουμε: $f(x) = 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1}$ και να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα αφού πρώτα βρεθεί το πεδίο παραγωγισιμότητας της f. Να γίνει η γραφική παράσταση (c) της f με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα.

δ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (c) στο σημείο όπου η ευθεία $y = 2$ τέμνει την καμπύλη (c).

Θέμα 46ο

Να υπολογιστούν τα $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ και $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, θέτοντας $\sqrt{1+x^2} = t - x$ και $\sqrt{x^2-1} = t - x$ αντίστοιχα.

Θέμα 47ο

Να εξετάσετε αν υπάρχουν συναρτήσεις $f : [0, 1] \to R_+^*$ για τις οποίες έχουμε συγχρόνως:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \text{ και } \int_0^1 xf(x)dx = \alpha \text{ και } \int_0^1 x^2 f(x)dx = \alpha^2, \text{ όπου } \alpha > 1.$$

Θέμα 48ο

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι: $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, όπου c σταθερός αριθμός.

Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta))$

Θέμα 49ο

Να δείξετε ότι: **α.** για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $2xe^x + e^x > 1$

β. $\int_1^{2002} e^x (2x+1)dx > 2002$

Θέμα 50ο

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R. Αν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$ το 1 και στο $x = 1$ το 0 να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^{-x}} dt = -1$.

Θέμα 51ο

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση

$$f: R \to R \text{ για την οποία ισχύει } \int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x,\ x \in R$$

Θέμα 52ο

Οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R και ισχύουν: $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$. Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta (f(x)g''(x)dx - f''(x)g(x))dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta))$.

Θέμα 53ο

Θεωρούμε συνάρτηση f που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, e]$ με $f(0) = 0$.

α. Να δείξετε ότι: $\int_0^e xf''(x)dx = ef'(e) - f(e)$

β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε: $\int_0^e xf''(x)dx = e[f'(e) - f(\xi)]$

Θέμα 54ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g στο R οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = f(x)$ και $f^2(0) - g^2(0) = 2003$.

Να δείξετε ότι: $\int_0^{2003} (f^2(x) - g^2(x))dx = 2003^2$.

Θέμα 55ο

Έστω $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{t^2+1}dt$, $\nu \in N$: **α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\nu \in N$.

β. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

Θέμα 56ο

Αν f συνεχής συνάρτηση στο R να δείξετε ότι:

α. $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ **β.** $\frac{1}{\gamma}\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\gamma \neq 0$.

Θέμα 57ο

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1}}^{\frac{1}{2}} e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$

Θέμα 58ο

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $\int_1^{e^2} f(x)\ell nxdx = f(x)+x$, για κάθε $x \in R$.

Θέμα 59ο

Έστω η συνάρτηση h με $h(x)=x^2e^{-x}$ και $K=\int_0^1 h(x)dx$. Δείξτε ότι $K=2-\frac{5}{e}$.

Θέμα 60ο

Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\frac{1}{1+x^2e^{-x}}$. Θέτουμε $I=\int_0^1 f(x)dx$. (Δεν ζητείται ο υπολογισμός του I)

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ είναι: $0\le x^2e^{-x}\le 1$.

Να επαληθεύσετε ότι για κάθε $\kappa\in[0,1]$ είναι: $1-\kappa\le\frac{1}{1+\kappa}\le 1-\frac{\kappa}{2}$.

β. Δείξτε ότι $1-\kappa\le I\le 1-\frac{\kappa}{2}$.

Θέμα 61ο

Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\frac{3x^3-5x^2+2x-1}{x^2-4x+4}$.

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f. Δείξτε ότι υπάρχουν τέσσερεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ τέτοιοι ώστε για κάθε $x\in A_f$ να είναι: $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-2}+\frac{\delta}{(x-2)^2}$.

β. Βρείτε μια παράγουσα της f στο $(-\infty,2)$ και υπολογίστε το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Θέμα 62ο

Έστω η συνάρτηση f που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\ell n\frac{5-x}{2x}$.

Α. Δείξτε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[1,4]$.

Β. α. Υπολογίστε την παράγωγο f' της f.

β. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 \ell n\frac{5-x}{2x}dx$

(κάνετε χρήση της παραγοντικής μεθόδου).

Θέμα 63ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f και φ με τύπους: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}}$, $x\in(\alpha,\beta)$ και $\varphi(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\eta\mu^2x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Να ορισθεί η σύνθετη συνάρτηση $f(\varphi(x))$ και να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Θέμα 64ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και φ με τύπους:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} \quad \mu\varepsilon \quad x\in[1,3] \quad \kappa\alpha\iota \quad \varphi(x)=3\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x \quad \mu\varepsilon \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Να ορισθεί η σύνθετη συνάρτηση $f(\varphi(x))$ και να αποδειχθεί ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\pi$.

Θέμα 65ο

Α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}x\sigma\upsilon\nu x dx$

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2+x$.

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση, έστω (κ), της θεωρούμενης συνάρτησης για το διάστημα $(-2,1)$.

β. Αφού διαπιστώσετε ότι η (κ) έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα x΄x να αποδείξετε στην συνέχεια ότι οι εφαπτόμενές της σ'αυτά τα σημεία είναι αντίστοιχως παράλληλες προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

γ. Αν (ε) είναι εκείνη η εφαπτομένη, από τις δύο παραπάνω, που είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της $x\hat{o}y$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την (κ) και από τις ευθείες (ε) και $x=1$.

Θέμα 66ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη και συνεχής σ'ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Ν'αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\frac{1}{\beta-\xi}\int_\alpha^\xi f(t)dt$.

Θέμα 67ο

Α. Ν'αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta xf''(x)dx=\left[xf(x)\right]_\alpha^\beta$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{2x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3x}dx$

Θέμα 68ο

Να αποδειχθεί ότι:

α. $x \geq ημx\dfrac{2x}{π}$ για κάθε x με $0 \leq x \leq \dfrac{π}{2}$, **β.** $e-1 \geq \int_0^2 e^{ημx}dx \geq \dfrac{π}{2}(e-1)$

γ. Η εξίσωση $\ell nx + x = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Θέμα 69ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-νx}$, $x \in R$, $ν \in N^*$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, να βρείτε τα ακρότατα της και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι: $2 \leq e^2 \cdot ν^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{ν}} xe^{-νx}dx \leq e$.

Θέμα 70ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2(2\ell nx - 3) - x(\ell nx - 2)$, $x > 0$.

α. Να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $F(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\ell nx$ και $g(x) = \dfrac{3x^2}{4} + 2x$.

Να αποδειχθεί ότι $\int_{g(x)}^{f(x)} \dfrac{1}{t^{1996}+1}dt > 0$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 71ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 + 2e^{-x}}{3x^2 + 4e^{-x}}$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

Θέμα 72ο

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ με $f(α) > 0$ και $\int_α^β f(x)dx < 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε $f(ξ) = 0$.

Θέμα 73ο

Ποια είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{1}{x(x+1)}dx$ στο $+\infty$; Δηλαδή ζητάμε το

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}\frac{dx}{x(x+1)}$.

Θέμα 74ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\int_{\pi}^{x}(t^{1999}+t^{2001}+t^{2003}+t)dt$. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 75ο

Αν για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}F(x)<F'(x)$.

Θέμα 76ο

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x}e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x),\ x,\alpha\in R.$$

Θέμα 77ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\int_3^x\frac{2t-10}{1-\eta\mu^2 t}dt$.

Να εξετάσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατά της.

Θέμα 78ο

Δίνεται $z\in C$. Αν $|z-1|\le 1$ και $|z-2|\le 1$, να δείξετε ότι $1\le|z|\le 2$.

Θέμα 79ο

Αν $z_1,z_2,\omega_1,\omega_2\in C$ να δείξετε ότι $|z_1\cdot\omega_1+z_2\cdot\omega_2|^2\le\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\left(|\omega_1|^2+|\omega_2|^2\right)$.

Θέμα 80ο

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 διαφορετικοί από το μηδέν με $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\alpha=\frac{z_2}{z_1}$ και $\beta=\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικοί.

Θέμα 81ο

Α. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z οι οποίοι έχουν την ίδια ιδιότητα "ο λόγος των αποστάσεων των εικόνων τους από τις εικόνες των μιγαδικών $z_1 = -3$ και $z_2 = 3$ είναι σταθερός και ίσος με $\frac{1}{2}$".

Β. Αν για τους μιγαδικούς ω_1, ω_2 ισχύει: $\left|\frac{\omega_1+3}{\omega_1-3}\right| = \left|\frac{\omega_2+3}{\omega_2-3}\right| = \frac{1}{2}$, να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|\omega_1 - \omega_2|$.

Θέμα 82ο

Έστω $z \in C$ με $|z| = \frac{1}{2}$. Αν $\omega = z - \frac{1}{z}$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες του ω κινούνται σε μια έλλειψη.

Θέμα 83ο

Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)dt$, $x \in R$, $\alpha, \beta, \in R$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν $x_0 \in R$ με $F'(x_0) = 0$ τότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

Θέμα 84ο

Να βρείτε συνάρτηση $f: R \to R$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{1}{8}x^{16} + \frac{1}{9}x^{19} + \gamma$ για κάθε $x \in R$ και $\gamma \in R$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε την σταθερά $\gamma \in R$.

Θέμα 85ο

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[0,1]$ και τέτοια ώστε να ισχύει: $0 < f(t) < 1$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Θεωρούμε επίσης και την συνάρτηση: $g(x) = 2x - \int_0^u f(t)dt - 1$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 86ο

Αν $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, τότε ν' αποδειχθεί ότι:

α. $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x > 0$.

β. $\int_1^x e^{t^2}dt \le \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e\right)$ (2), για κάθε $x \in R$.

Θέμα 87ο

Α. Να δείξετε ότι: **α.** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $x^x \geq e^{x-1}$

β. Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $(x^2+1)^{x^2+1} \geq e^{x^2}$

Β. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο [0, 3] για την οποία ισχύει: $\int_2^x f(t)dt \geq x^3 - συνπx - 7$

για κάθε $x \in [0, 3]$. Να αποδειχθεί ότι $f(2) = 12$

Θέμα 88ο

Α. Αν $f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{e^t}dt$ να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

Β. Να προσδιορίσετε συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt = ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $α \in [0, π]$

και τις τιμές που παίρνει το α.

Θέμα 89ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο: $f(x) = \int_1^x \frac{12}{2+1^2}dt$.

Ν'αποδείξετε ότι: $2 < f(2) - f(1) < 4$.

Θέμα 90ο

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα και θετική τότε ν'αποδειχθεί ότι ισχύει:

α. $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \geq 1$ και

β. Ν'αποδειχθεί οτι: $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = 0$

Θέμα 91ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ με $f(x) = \int_1^{2x^2+3x} \sqrt{t+1}dt$

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $(1, f(1))$

β. Να βρείτε το $λ \in R$ ώστε η ευθεία $\sqrt{2}\left(λ^2 - \frac{6}{7}\right)x = 1\text{-}3y$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη που βρήκατε.

Θέμα 92ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^4-5x^3+7x^2-3x+6}{x^2+1}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον x΄x και τις ευθείες $x=0, x=1$.

Θέμα 93ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x)=x^2-3x+4$ και $g(x)=-x^2+2x+4$ αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Β των C_f, C_g

β. Μια ευθεία $x=\alpha$ με $\alpha\in\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g στα Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί το α ώστε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΓΔ, όπου Α το σημείο τομής των C_f, C_g με τετμημένη 0, να είναι μέγιστο.

Θέμα 94ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

$f''(x)=e^x+g''(x)$ για κάθε $x\in R$

$f(0)=g(0)$ $\qquad f'(0)+e=g'(0)+1$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και από τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Θέμα 95ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-xe^x-2$ και $g(x)=-2x+x^2$.

α. Να εξετάσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και από τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Θέμα 96ο

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-3}$, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

Θέμα 97ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{(\lambda x+1)e^x}{1-x^2}$, $\lambda\in R$ για την οποία ισχύει $3f'(0)-f(0)=11$.

Να βρείτε τι εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.

Θέμα 98ο

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει: $e^x \geq x+1$.

Β. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, $\alpha > 0$ να δείξετε ότι $\alpha = e$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x(x^2+2)$ και $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

Θέμα 99ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{αν } x < 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράστασηης f, την ευθεία $x = 2$ και τον άξονα x΄x.

Θέμα 100ο

Θεωρείστε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

α. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο R και να βρείτε ποια είναι αυτή η ρίζα.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$ $(\alpha > 0)$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$. Τι τιμή παίρνει το εμβαδόν αυτό όταν $\alpha \to +\infty$;

Θέμα 101ο

Α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^e \ell nx\,dx$

Β. α. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^x$

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την καμπύλη $y = f(x)$ τον άξονα των τετμημένων και της ευθείες $x = -2$ και $x = 1$.

Θέμα 102ο

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 4}{x^2 - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \dfrac{\beta x^2 + \gamma x + 3}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό όταν $x \to 1$

Θέμα 103ο

Α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\Delta=(0,1)\to R$ με $f(x)=x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}$ όπου $\kappa,\lambda\in Q$ και $\kappa>\lambda>0$. Ν' αποδείξετε ότι κάθε f παρουσιάζει στο Δ ένα και μόνον ένα τοπικό ακρότατο, καθορίζοντας συγχρόνως το είδος του.

Β. Αν $g(x)=x^3(1-x)^2$ με $x\in[0,1]$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική της $y=g(x)$ και τον ημιάξονα οx.

Θέμα 104ο

Α. Να βρεθεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν: $g'(x)=x^2e^x+\dfrac{2g(x)}{x}$ (1) για κάθε $x\in R^*$, $g(0)=0$ και $g(1)=e$.

Β. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής, τα κοίλα και να βρεθούν όλες οι ασύμπτωτες που διαθέτει.

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική πράσταση (c) της g, του άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$, όπου $\lambda<0$. Τέλος να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)$.

Θέμα 105ο

Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο: $g_\alpha(x)=(x^2-2\alpha x)e^{|x-\alpha|}$ όπου α είναι μια πραγματική παράμετρος.

Α. Έστω $\alpha=0$.

α. Δείξτε ότι η g_0 είναι άρτια.

β. Δείξτε ότι η g_0 είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ. Μελετήστε την g_0 ως προς την μονοτονία και κατασκευάστε την γραφική της παράσταση ως προς ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Β. Έστω $\alpha\neq 0$.

α.i. Αν (C_α) η γραφική παράσταση της g_α ως προς το $(0,\vec{i},\vec{j})$, δείξτε ότι η ευθεία $x=\alpha$ είναι άξονας συμμετρίας της (C_α).

ii. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(\alpha)}{x-\alpha}=-\alpha^2$. (Υποθέστε γνωστό το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$)

iii. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^-}\dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(\alpha)}{x-\alpha}=\alpha^2$.

iv. Είναι η g_α παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$ για $\alpha\neq 0$;

β. i. Υπολογίστε την $g_\alpha'(x)$ στο $(\alpha,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η g_α' μηδενίζεται για μια μόνο τιμή στο $(\alpha,+\infty)$.

ii. Υπολογίστε την $g_\alpha''(x)$ στο $(\alpha,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η g_α'' μηδενίζεται στο $(\alpha,+\infty)$ αν και μόνον αν $\alpha^2>2$.

iii. Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της g_α στο $(\alpha,+\infty)$ και στο $(-\infty,\alpha]$.

Γ. Έστω $\alpha=1$.

α. Μελετήστε την g_1 ως προς την μονοτονία στο $[1,+\infty)$.

β. Προσδιορίστε τα σημεία τομής της (C_1) με τους άξονες.

γ. Κατασκευάστε την (C_1) ως προς το σύστημα $(0,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση G που ορίζεται στο $[1,+\infty)$ και έχει τύπο: $G(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{x-1}$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

α. Προσδιορίστε τα α, β, γ έτσι ώστε η G να ταυτίζεται με την πρώτη παράγωγο της g_1 στο $[1,+\infty)$.

β. Υπολογίστε το εμβαδόν της περιοχής του επιπέδου που ορίζεται από την (C_1) και τον άξονα των τετμημένων.

Θέμα 106ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2-x-2}$ με πεδίο ορισμού το $(2,+\infty)$.

α. Αφού παρατηρήσετε ότι οι ευθείες x = 2 και y = 1 είναι ασύμπτωτες της $y=f(x)$ και μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να υπολογιστεί το $\int_3^4 f(x)dx$

β. Να προσδιορίσετε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τις γραφικές παραστάσεις των $y=f(x)$ και $y=\frac{1}{2}x^2-8$ και από τις ευθειες $x=3$ και $x=4$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} f(t)dt=2$

Θέμα 107ο

Η καμπύλη (c) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x στο διάστημα [α, β]. Αν η επιφάνεια που ορίζεται από την καμπύλη (c), τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β έχει εμβαδόν:

$E=\dfrac{\alpha+1}{e^\alpha}-\dfrac{\beta+1}{e^\beta}$ τότε:

α. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης $(c): y=f(x)$ και

β. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_\beta^0 f(x)dx$

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 12

16. Έστω η συνάρτηση $f(x)\begin{cases}\alpha x^2+3x+6 & x<0\\ 2x^2+\beta x+3\gamma & x\geq 0\end{cases}$. Να βρεθούν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θ. Rolle στο διάστημα [-2,2]

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha-1}{4}x^3+\dfrac{\beta-2\gamma}{3}x^2+\dfrac{2\gamma}{3}x+\mu, \mu,\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 1$. Αν ισχύει $3\alpha+4\beta=3$ να δείξεται ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (Α(ξ,ξ(1)) να είναι παράλληλη στον x΄x.

18. Να δικαιολογήσετε ότι ένα πολυώνυμο p(x) με πραγματικούς συντελεστές έχει υ διακεκριμένες ρίζες, τότε η εξίσωση $p'(x)=0$ έχει υ - 1 ρίζες.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(x-2003)\cdot(x-2004)\cdot(x-2005)$ να δειχτεί ότι η $f'(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς παραγματικές ρίζες.

(**Υπ.:** Ισχύει Rolle στα [0,2003], [2003, 2004] [2004, 2005]. Άρα η f΄(x) έχει τουλάχιστον ρίζα στο καθένα από αυτά και είναι 3ου βαθμού)

20. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) και $\dfrac{\beta f(\alpha)}{\alpha}=f(\beta)\ (\alpha>0)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

(**Υπ.:** $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\Leftrightarrow \xi\cdot f'(\xi)-f(3)=0\Leftrightarrow \ldots\left(\dfrac{f(\xi)}{\xi}\right)=0$. Εφαρμόστε Rolle για την $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$).

21. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

(**Υπ.:** $f'(\xi)+f(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}\cdot f'(\xi)+e^{\xi}\cdot f(\xi)=0\Leftrightarrow\left(e^{\xi}\cdot f(\xi)\right)'=0$.

Εφαρμόστε Rolle για την $g(x)=e^x\cdot f(x)$

22. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(**Υπ.:** $2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0\Leftrightarrow\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\right)\varepsilon\varphi x=\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2(\varepsilon\varphi x)'=0$

$\Leftrightarrow\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\varphi x\right)'=0$. Εφαρμόζουμε Rolle για την $g(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\varepsilon\varphi x$)

23. Αν f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=f(0)$, $f(1)=3$, $g(1)=2$ να δείξετε ότι $f(x)=g(x)+x$.

(**Υπ.:** $f''(x)=g''(x)$ άρα $f'(x)=g'(x)+c_1$ οπότε $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$ κ.λ.π.)

24. Δίνεται $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

α. $\eta\mu x+xf'(\ell nx)=x\sigma\upsilon\nu x,\ x>1$ **β.** $\eta\mu x+xf'(\ell nx)=x\sigma\upsilon\nu x,\ x>1$

Να βρεθεί f(e).

(**Υπ.:** $\eta\mu x+xf'(\ell nx)=x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow\frac{f'(\ell nx)}{x}=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}\Leftrightarrow(f(\ell nx))'=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'$ άρα $f(\ell nx)=\frac{\eta\mu x}{x}+c$ κ.λ.π.

25. Δείξτε ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν το πολύ μια ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα

α. $2x^3-3x^2-36x+5=0$ στο (0,1) **β.** $x^3-\alpha x^2+3\alpha^2x-1$ στο R, $\mu\in R$

(**Υπ.:** **α.** Έστω ότι έχει 2 ρίζες x_1, x_2 οπότε σε άτοπο με Rolle, **β.** όμοια).

26. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν το πολύ δύο ρίζες στα αντίστοιχα διαστήματα

α. $x^4+2x^3+4x^2+\alpha x+\beta$ στο R, $\alpha,\beta\in R$ **β.** $x^{2\nu}+\alpha x+\beta$ στο R, $\alpha,\beta\in R$

(**Υπ.:** **α.** Έστω ότι έχει τρεις ρίζες x_1, x_2, x_3 οπότε με Rolle σε άτοπο, **β.** όμοια με α.

27. Δίνεται η $f:(1,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη ώστε $2f(x)=-xf'(x)\ell nx$ για $x>1$. Αν $f(e)=e$ να βρεθεί το τύπος της f.

(**Υπ.:** $2f(x)=-xf'(x)\ell nx\Leftrightarrow 2\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ell nx=0\Leftrightarrow 2(\ell nx)'f(x)+f'(x)\ell nx=0$

$\Leftrightarrow(\ell n^2x)f(x)+f'(x)\ell n^2x=0\Leftrightarrow(\ell n^2x\cdot f(x))'=0$ οπότε $\ell n^2xf(x)=c$ κ.λ.π.).

28. Να βρεθεί η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x)=2x\cdot e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ και $f(e)=2$.

(**Υπ.:** $f'(x)=2xe^{-f(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{e^{-f(x)}}=2x\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}=2x\Leftrightarrow(e^{f(x)})'=(x^2)'$ άρα $e^{f(x)}=x^2+c$ κ.λ.π.)

29. Έστω η f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι:

α. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την συνάρτηση $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)f(x)$

β. Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha-\xi}\cdot\frac{1}{\beta-\xi}$ (1).

(**Υπ.: β.** Η (1) γράφεται: $f'(\xi)(\alpha-\xi)+(\xi-\alpha)f(\xi)+(\xi-\beta)f(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=0$ όπου ισχύει από **α.**)

30. Έστω η f παραγωγίσιμη στο R με $g(x)=(x^2-1)f(x)$. Να δείξετε ότι f $\xi \in (-1,1)$ με $f'(\xi)=\frac{2\xi}{1-\xi^2}\cdot f(3)$

(**Υπ.:** Όμοια με προηγούμενη)

31. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(x)+xf'(x)=4x^3+2x$ για κάθε $x \in R$ και $f(1)=2$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

(**Υπ.:** $f(x')+xf'(x)=4x^3+2x \Leftrightarrow (f(x)\cdot x)'=(x^4+x^2)'$ άρα $f(x)\cdot xf(x)=x^4+x^2+c \Leftrightarrow f(x)=...$

32. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-4$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα: $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$).

33. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη σστο [-1, 1] με $f(-1)=1$ και $f(1)=3$. Να δειχθεί ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

(**Υπ.: i.** Εφαρμόστε Bolzano για την $g(x)=f(x)-2+x$ οπότε $\exists\xi \in (-1,1)$ ώστε $f(3)=2-\xi$
ii. Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. στα [–1,1] και [ξ, 1]).

34. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta): f''(\xi)=0$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. στα $\left[\alpha\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Προσέξτε ότι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ οπότε εφαρμόστε Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$).

35. Να δείξεται ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα.

α. $x^5+\alpha x+\beta=0$ στο R α, β, $\gamma>0$
β. $x^2+2\ell nx=2$ στο $(1,2)$
γ. $x^5-3x+1=0$ στο $(1,2)$
δ. $2e^x+2x=x^2+2$ στο R

(**Υπ.: α.** Το σύνολο τιμών είναι $(-\infty,+\infty)$ και περιέχει το 0. Ακόμα $f\uparrow$, **β.** Με θ. Bolzano 1 τουλάχιστον και μετά έστω 2 και με Rolle άτοπο, **γ.** θ. Bolzano 1 τουλάχιστον και μετά $f\uparrow$ στο [1, 2], δ. προφανής λύση η $x=0$ και $f\uparrow$).

36. Αν για την συνάρτηση f ισχύει το θ. Rolle στο [0, 4]. Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (0,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+f'(\xi_4)=0$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ. Μ.Τ. στα [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]).

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot ημx$ με την βοήθεια του θ. Μ.Τ. Να δείξετε ότι $|f(x_1)-f(x_2)| \le 11|x_1-x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [0,10]$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$ λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $f'(x)=ημ+xσυνx$ και $|f'(x)| \le 1+|x| \le 1+10=11$).

38. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\ell n(e^x+2)+e^{f(x)}=3\cdot e^x+4x$. Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

(**Υπ.:** Υποθέστε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Από θ. Rolle $\exists \xi \in (x_1,x_2): f'(\xi)=0$. Παραγωγίστε την δοθείσα $\exists \xi \in (x_1,x_2): f'(\xi)=0$ δείξτε ότι το πιο πάνω είναι άτοπο).

39. Η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο [0, α] με $|f''(x)| \le m$ για κάθε $x \in (0,α)$. Αν υπάρχει $γ \in (0,α)$ τέτοιο ώστε $f(γ)=0$, να δείξετε ότι $|f'(0)|+f'(α) \le α\cdot m$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ.Μ.Τ. για την f΄(x) στα [0, γ] και [γ, α]).

40. Να αποδείξετε με την βοήθεια του θ.Μ.Τ. της ανισώτητες:

i. $ημ\frac{3π}{5}<\frac{1}{2}+\frac{13π}{30}$

ii. $ex<\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}<e\cdot y,\ 0<x<y$

iii. $\frac{1}{x+1}<\ell n\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x},\ x>0$

iv. $x<e^x<x\cdot e^x,\ \ x>0$